


KdV 方程式の古典逆散乱法による解の構成

KdV 方程式 ... 浅い運河を伝わる波を記述する方程式

$$u: \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{(x, t)} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{u(x, t)}$$

x : 位置, t : 時刻

独立変数

u : 波の高さ

従属変数

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \text{ など.}$$

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

--- KdV 方程式

非線形項があるので、重ね合わせの原理が使えない。

⇒ 簡単には解けない!!

$u(x, t)$ が KdV 方程式の解であるとすると、 $u(x, t)$ を

ポテンシャルとしてもつような Schrödinger 作用素
(L-operator)

$$L := -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$$

を考えると、 $Lf = \lambda f$ (Schrödinger eq)

の λ は t 不変 ($\lambda_t = 0$)

$u(x, t)$ が KdV 方程式の解でかつ $u(x, t) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$)
 (ポテンシャルが急減少)

のとき、 $Lf = \lambda f$ の 散乱データは t に関して

$$\left(-\frac{d^2 f}{dx^2} + u(x, t)f = \lambda f\right) \quad \text{線形化}$$

$\Rightarrow$ 時刻 t における散乱データから $u(x, t)$ を構成可能.

$$L := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t) \quad \text{作用素としての積}$$

$$A := -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial x} \cdot u$$

とすると、

$$-4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x$$

$$\frac{d}{dt}L = u_t$$

$$\begin{aligned} [A, L] &= \left(-4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x\right)\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\right) \\ &\quad - \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\right)\left(-4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x\right) \\ &= 4\frac{\partial^5}{\partial x^5} - 4(u_{xxx} + 3u_{xx}\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3}{\partial x^3}) \\ &\quad - 6u\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u(u_x + u\frac{\partial}{\partial x}) - 3u_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3u_xu \\ &= \left\{ 4\frac{\partial^5}{\partial x^5} - 6u_{xx}\frac{\partial}{\partial x} - 12u_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 6u\frac{\partial^3}{\partial x^3} \right. \\ &\quad \left. - 3u_{xxx} - 6u_x\frac{\partial}{\partial x} - 3u_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4u\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u^2\frac{\partial}{\partial x} + 3uu_x \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \boxed{4 \frac{\partial^5}{\partial x^5}} - 4 \left(u_{xxx} + \boxed{3 u_{xx} \frac{\partial}{\partial x}} + \boxed{3 u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \boxed{u \frac{\partial^3}{\partial x^3}} \right) \\
&\quad - \boxed{6 u \frac{\partial^3}{\partial x^3}} + 6u \left(u_x + \boxed{u \frac{\partial}{\partial x}} \right) - \boxed{3 u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}} + 3u_x u \\
&\quad - \left\{ \boxed{4 \frac{\partial^5}{\partial x^5}} - \boxed{6 u_{xx} \frac{\partial}{\partial x}} - \boxed{12 u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}} - \boxed{6 u \frac{\partial^3}{\partial x^3}} \right. \\
&\quad \left. - 3 u_{xxx} - \boxed{6 u_x \frac{\partial}{\partial x}} - \boxed{3 u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}} - \boxed{4 u \frac{\partial^3}{\partial x^3}} + \boxed{6 u^2 \frac{\partial}{\partial x}} + 3u u_x \right\} \\
&= -u_{xxx} + 6u u_x.
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} L = u_t \\ [A, L] = -u_{xxx} + 6u u_x \end{cases} \quad L(t) = U(t) L(0) U^{-1}(t)$$

KdV 方程式は

$$\frac{d}{dt} L = [A, L] \quad \text{と書ける.}$$

L ax 方程式

Schrödinger 方程式

$$L f = \lambda f$$

$$\left(-\frac{d^2 f}{dx^2} + u(x, t) f = \lambda f \right)$$

これを利用して
 $u(x, t)$ を構成

λ は t に無関係のとき、両辺を t で微分して、

$$\underline{\frac{dL}{dt}} f + L \frac{df}{dt} = \lambda \frac{df}{dt}.$$

$$\Leftrightarrow \underline{ALf} - LAf + (L - \lambda) \frac{df}{dt} = 0.$$

$A\lambda f$

$$\Leftrightarrow (L - \lambda) \left(\frac{df}{dt} - Af \right) = 0.$$

$(L - \lambda)h = 0$ は 2 階の ODE 存の t に独立な解

$f_{\alpha}(t), g_{\alpha}(t)$ が存在する。

$$\frac{df_{\alpha}(t)}{dt} - Af_{\alpha}(t), \quad \frac{dg_{\alpha}(t)}{dt} - Ag_{\alpha}(t)$$

も $(L - \lambda)h = 0$ の解に等しい。

よって

$$\frac{df_{\alpha}(t)}{dt} - Af_{\alpha}(t) = \alpha(t)f_{\alpha}(t) + \beta(t)g_{\alpha}(t).$$

$$\frac{dg_{\alpha}(t)}{dt} - Ag_{\alpha}(t) = \gamma(t)f_{\alpha}(t) + \delta(t)g_{\alpha}(t).$$

行列で書くと。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f(x,t) & g(x,t) \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} f(x,t) & g(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,t) & g(x,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) & \gamma(t) \\ \beta(t) & \delta(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha(t) & \gamma(t) \\ \beta(t) & \delta(t) \end{bmatrix}$$

$$-y'' + u(x,t)y = \lambda y.$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ として } u(x,t) \rightarrow 0$$

$$\boxed{x \rightarrow +\infty \text{ での Jost 解}}$$

$$f_+(x, \xi, t) \text{ は } x \rightarrow +\infty \text{ で } e^{i\xi x} \text{ と振る舞う解と可なり}$$

$$-(e^{i\xi x})'' = \xi^2 e^{i\xi x} \quad \lambda = \xi^2$$

$$-f_+''(x, \xi, t) + u(x,t)f_+(x, \xi, t) = \xi^2 f_+.$$

$$f_+(x, \xi, t)$$

$$(\xi \rightarrow -\xi \text{ と可なり})$$

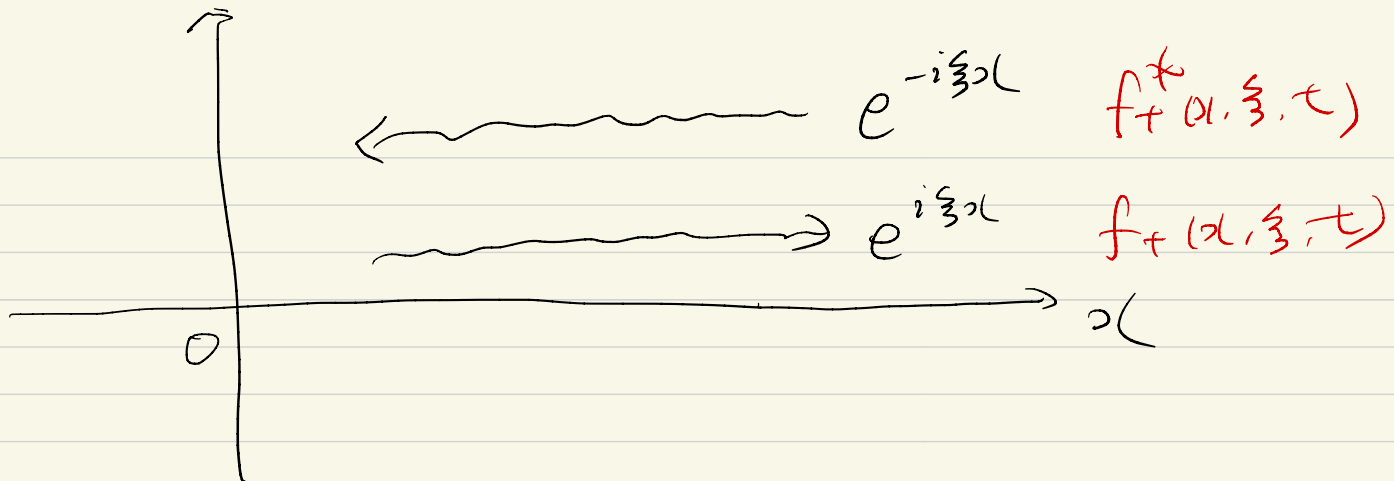
$$-f_+''(x, -\xi, t) + u(x,t)f_+(x, -\xi, t) = \xi^2 f_+.$$

$$f_+^*(x, -\xi, t)$$

$$f_+^*(x, \xi, t) := f_+(x, -\xi, t) \text{ と可なり}$$

$$f_+^*(x, \xi, t) \text{ は } x \rightarrow +\infty \text{ で } e^{-i\xi x} \text{ と振る舞う解}$$

$$f_+(x, \xi, t), f_+^*(x, \xi, t) \text{ は (2 次独立解 (省略 ロンスキアン))}$$



$$x \rightarrow -\infty \text{ として } u(x, t) \rightarrow 0$$

$x \rightarrow -\infty$ での Jost 解

$f_-(x, \frac{\lambda}{2}, t)$ を $x \rightarrow -\infty$ として $e^{-i\frac{\lambda}{2}x}$ と振る舞う解

$f_-^*(x, \frac{\lambda}{2}, t) := f_-(x, -\frac{\lambda}{2}, t)$ を $x \rightarrow -\infty$ として $e^{i\frac{\lambda}{2}x}$ と振る舞う解



$Lf = \lambda f$ の基本解として $f_+(x, \frac{\lambda}{2}, t)$, $f_-(x, \frac{\lambda}{2}, t)$ を
 ≥ 3 . $\beta(t) = \gamma(t) = 0$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (f_+(x, t) f_-(x, t)) - A(f_+(x, t) f_-(x, t)) \\ = (f_+(x, t) f_-(x, t)) \begin{pmatrix} q(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{df_+}{dt} - Af_+ = \alpha(t) f_+ \\ \frac{df_-}{dt} - Af_- = \delta(t) f_- \end{cases} \quad A = -4 \frac{\partial^3}{\partial z^3} + 6u \frac{\partial}{\partial z} + 3u_z$$

$$z \rightarrow +\infty \text{ or } z \rightarrow -\infty \quad \frac{df_+}{dt} - Af_+ \longrightarrow 4(i\frac{z}{3})^3 e^{i\frac{z}{3}t}$$

$$\alpha(t) f_+ \longrightarrow \alpha(t) e^{i\frac{z}{3}t}$$

$$\boxed{\alpha(t) = 4(i\frac{z}{3})^3}$$

$$z \rightarrow -\infty \text{ or } z \rightarrow +\infty \quad \frac{df_-}{dt} - Af_- \longrightarrow 4(-i\frac{z}{3})^3 e^{-i\frac{z}{3}t}$$

$$\delta(t) f_- \longrightarrow \delta(t) e^{-i\frac{z}{3}t}$$

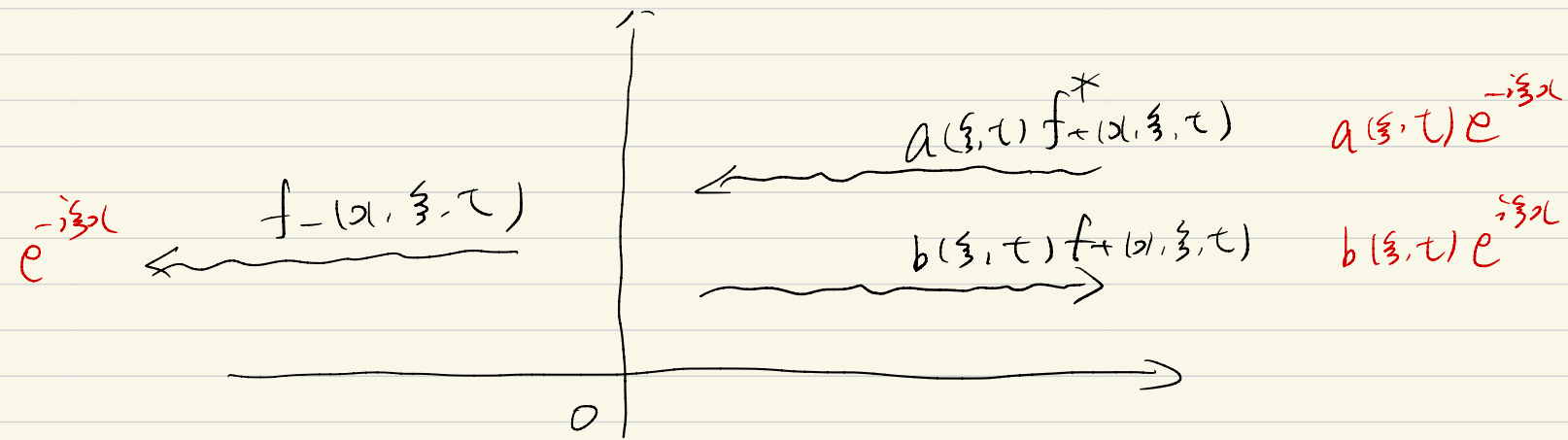
$$\boxed{\delta(t) = 4(-i\frac{z}{3})^3}$$

$$\begin{cases} \frac{df_+}{dt} - Af_+ = 4(i\frac{z}{3})^3 f_+ \\ \frac{df_-}{dt} - Af_- = 4(-i\frac{z}{3})^3 f_- \end{cases}$$

これから散乱データの時間発展の式を求める。

$f_+(u, \frac{z}{3}, t)$, $f_+^*(u, \frac{z}{3}, t)$ は (次々) である。

$$f_-(x, z, t) = a(z, t) f_+^*(x, z, t) + b(z, t) f_+(x, z, t)$$



$a(z, t)$: 入射波のデータ

$b(z, t)$: 反射波のデータ

$$r(z, t) := \frac{b(z, t)}{a(z, t)} : \text{反射係数}$$

t で微分して

$$\frac{df_-}{dt} = \frac{da}{dt} f_+^* + a \frac{df_+^*}{dt} + \frac{db}{dt} f_+ + b \frac{df_+}{dt}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow A f_- + 4(-i\frac{\omega}{3})^3 f_- &= \left(\frac{da}{dt}\right) f_+^* + \left(\frac{db}{dt}\right) f_+ \\ &+ a \left\{ A f_+^* + 4(-i\frac{\omega}{3})^3 f_+^* \right\} + b \left\{ A f_+ + 4(i\frac{\omega}{3})^3 f_+ \right\} \end{aligned}$$

整理して

$$\frac{da}{dt} f_+^* + \left\{ \frac{db}{dt} + 8(i\frac{\omega}{3})^3 b \right\} f_+ = 0$$

$f_+^*(x, t)$, $f_+(x, t)$ は 1 次独立

$$\frac{da(\xi, t)}{dt} = 0, \quad \frac{db(\xi, t)}{dt} = \delta i \xi^3 b(\xi, t),$$

$$\therefore a(\xi, t) = a(\xi, 0)$$

$$b(\xi, t) = b(\xi, 0) \exp(\delta i \xi^3 t)$$

反射係数は $r(\xi, t) = \frac{b(\xi, t)}{a(\xi, t)} = r(\xi, 0) \exp(\delta i \xi^3 t)$

$a(\xi, t)$ は t 不変

$a(\xi, t)$ は純虚数
 $i\eta_1, \dots, i\eta_n \neq 0$
 (省略)

よって $a(\xi, t)$ の H における零点 $i\eta_1, \dots, i\eta_n$ は t 不変
 零点の個数 n

$b(i\eta_j, t)$

このとき $f_-(\alpha, i\eta_j) = d_j(t) f_+(\alpha, i\eta_j)$

よって $d_j(t) = d_j(0) \exp(\delta \eta_j^3 t) \quad (j=1, \dots, n)$

$$d_j = i a_\xi(i\eta_j) C_j \text{ と可なり}$$

$$C_j(t) = C_j(0) \exp(\delta \eta_j^3 t) \quad (j=1, \dots, n)$$

$\{r(\xi, t), \eta_j, C_j(t) \quad (j=1, \dots, n)\}$

を散乱データという。これらは t に線形に時間
 発展する。

無反射解

$$r(x, t) = 0, \quad \eta_j \quad (j=1, \dots, n), \quad c_j \quad (j=1, \dots, n)$$

を与えられるとき,

$$L_j(t) = L_j \exp(i\eta_j^2 t)$$

である.

散乱データを $\{0, \eta_j, c_j(t) \quad (j=1, \dots, n)\}$ とする.

このデータに対するポテンシャル $u(x, t)$ とすると,

$u(x, t)$ は KdV 方程式の解

$$\textcircled{1} \quad a_{jk}(x, t) = L_j(t)^{-1} e^{2i\eta_j x} f_{jk} + \frac{1}{\eta_j + \eta_k}$$

$$(1 \leq j, k \leq n)$$

として $f_j(x, t)$ を

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}(x, t) f_k = -2 \quad (j=1, \dots, n)$$

の解とすると,

$$u(x, t) = - \sum_{j=1}^n \eta_j L_j(t)^{-1} e^{2i\eta_j x} f_j(x, t)^2$$

$$h_j(x, t) = e^{2i\eta_j x} f_j(x, t) \quad \text{とすると}$$

$$u(x, t) = - \sum_{j=1}^n \eta_j L_j(t)^{-1} h_j(x, t)^2 \quad \leftarrow \textcircled{\star}$$

$$-h_j'' + u h_j = -\eta_j^2 h_j \quad (\text{單純計算省略})$$

⑤ $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$$u' = -2 \sum_{j=1}^n \eta_j C_j(t)^{-1} h_j h_j'$$

$$u'' = -2 \sum_{j=1}^n \eta_j C_j(t)^{-1} (h_j h_j'' + h_j'^2).$$

⑥ $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$$h_j'' = u h_j + \eta_j^2 h_j$$

$$u'' = -2 \sum_{j=1}^n \eta_j C_j(t)^{-1} (u h_j^2 + \eta_j^2 h_j^2 + h_j'^2).$$

$$= 2u^2 - 2 \sum_{j=1}^n \eta_j C_j(t)^{-1} (\eta_j^2 h_j^2 + h_j'^2).$$

$$\therefore u''' = 6uu' - 8 \sum_{j=1}^n \eta_j^3 C_j^{-1} h_j h_j'$$

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}(x, t) f_k = -2 \quad \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \forall j.$$

$$\dot{a}_{jk}(x, t) = -8 \eta_j^3 C_j(t)^{-1} e^{2\eta_j x} f_{jk} \quad \forall j, k.$$

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{f}_k = 8 \eta_j^3 C_j^{-1} e^{2\eta_j x} f_j$$

$$A = (a_{jk})_{1 \leq j, k \leq n} \quad \text{可逆行列} \quad B = (b_{jk})_{1 \leq j, k \leq n} \quad \text{可逆}.$$

$$\dot{f}_j = 8 \sum_{k=1}^n b_{jk} \eta_k^3 C_k^{-1} e^{2\eta_k x} f_k.$$

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} f_l = -2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^n b_{jk} a_{kl} f_l = -2 b_{kj}$$

$$\left(\begin{aligned} \therefore 2 \sum_{k=1}^n b_{kj} &= - \sum_{k,l=1}^n b_{jk} a_{kl} f_l \\ &= - \sum_{l=1}^n \delta_{jl} f_l = -f_j \end{aligned} \right)$$

$$\sum_{j=1}^n \dot{f}_j = 8 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \eta_k^3 C_k^{-1} e^{2\eta_k x} f_k.$$

$$= -4 \sum_{k=1}^n \eta_k^3 C_k^{-1} e^{2\eta_k x} f_k^2.$$

$$= -4 \sum_{k=1}^n \eta_k^3 C_k^{-1} h_k^2.$$

$$\boxed{\dot{u} = -\left(\sum_{j=1}^n \dot{f}_j\right) = -8 \sum_{k=1}^n \eta_k^3 C_k^{-1} h_k h_k'}$$

$$\text{LX} \neq f^{-1} \quad \dot{u} - 6uu' + u'' = 0$$

//

