

ホーキング放射

片桐奏羽 2021.08.08. ver1.0 四葉研究交流会2021

目的

ホーキング放射

古典的には
なんでも吸い込むはずなのに

ブラックホールは量子論的には熱を放出している

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}$$

Hawking 1974

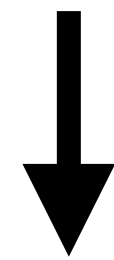
このことをなるべく簡単に解説する

流れ

1. 純粋状態と混合状態
2. 統計力学と熱力学
3. 調和振動子と真空
4. ボゴリューボフ変換
5. ブラックホール
6. 無質量スカラー場と境界条件
7. ホーキング放射
8. まとめ

純粋状態と混合状態

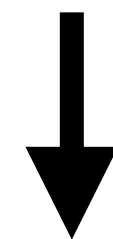
量子状態 = 純粋状態 or 混合状態



ベクトル $|\psi\rangle \longleftrightarrow$ 密度行列 $\hat{\rho}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

$$\hat{\rho}_\Psi^2 = \hat{\rho}_\Psi$$

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle \underline{\langle i|\Psi\rangle}$$



$$|\langle i|\Psi\rangle|^2 \quad \text{確率}$$

純粋状態と混合状態

量子状態 = 純粋状態 or 混合状態



密度行列 $\hat{\rho} = \sum_a P(a) |\Psi\rangle\langle\Psi|$

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$$

期待値 $\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}\hat{\rho}\hat{O} = \sum_i \langle i | \hat{\rho}\hat{O} | i \rangle$

注意点

- ・ 純粋状態は通常的时间発展(ユニタリ時間変換)では純粋状態のまま

統計力学と熱力学

温度Tの熱浴と接している系

カノニカル分布

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$$

ハミルトニアン(エネルギー)

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

逆温度

分配関数

統計力学と熱力学

温度Tの熱浴と接している系

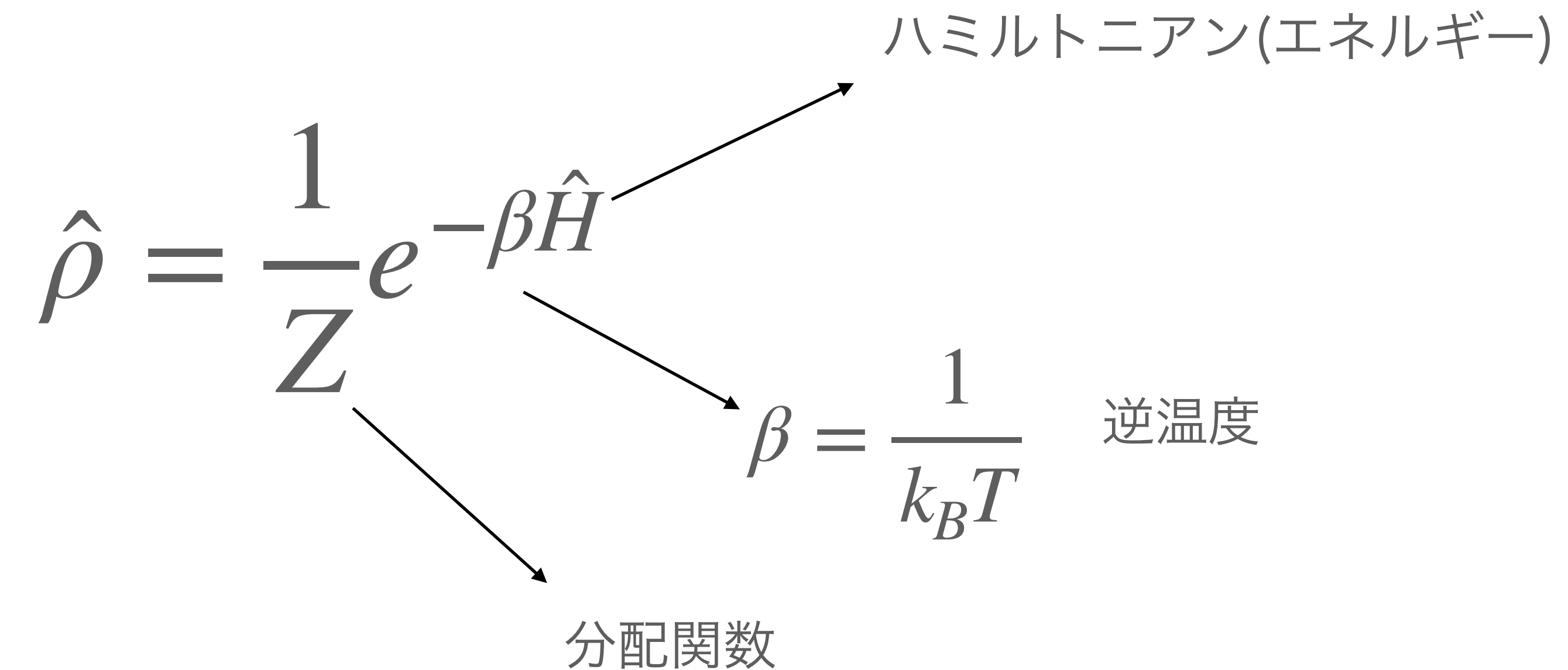
カノニカル分布

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$$

ハミルトニアン(エネルギー)

$\beta = \frac{1}{k_B T}$ 逆温度

分配関数



自己情報量

$$\hat{S} = -\log \hat{\rho}$$

$$S = \langle \hat{S} \rangle = \beta E + \log Z \quad \text{熱力学のエントロピーに対応}$$

調和振動子と真空

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{N} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \qquad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$$

角振動数
↓
個数演算子

消滅演算子 真空状態

$$\hat{a} | 0 \rangle = 0$$

個数nの状態

$$| n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^{\dagger n} | 0 \rangle$$

生成演算子

ボゴリューボフ変換

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$$

2種類の生成消滅演算子を混じり合わせる

$$\hat{a}(\theta) = \hat{a} \cosh \theta + \hat{b}^\dagger \sinh \theta = \hat{U}_\theta \hat{a} \hat{U}_\theta^\dagger$$

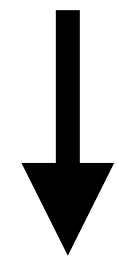
$$\hat{b}(\theta)^\dagger = \hat{a} \sinh \theta + \hat{b}^\dagger \cosh \theta = \hat{U}_\theta \hat{b}^\dagger \hat{U}_\theta^\dagger$$

ボゴリューボフ真空

$$|\theta\rangle = \hat{U}_\theta |0\rangle = \frac{1}{\cosh \theta} e^{-\tanh \theta \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger} |0\rangle \otimes |0\rangle$$

ボゴリューボフ変換

$$|\theta\rangle = \hat{U}_\theta |0\rangle = \frac{1}{\cosh \theta} e^{-\tanh \theta \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger} |0\rangle \otimes |0\rangle$$



$$\hat{\rho}_\theta = |\theta\rangle\langle\theta|$$

bの方を見ないことにする 周辺確率をとる

→ $\hat{\rho}_a = \text{Tr}_b \hat{\rho}_\theta = \frac{1}{\cosh^2 \theta} e^{\beta \hat{H}_a}$ カノニカル分布が得られる

$$\beta = -\frac{\log \tanh^2 \theta}{\hbar \omega}$$

ブラックホール

ピタゴラスの定理の時空への拡張

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2$$

$$f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

Mはrより内側の質量

r=2Mは事象の地平線 $f(2M) = 0$

事象の地平線より内側から情報を外部に伝達することができない。

星の半径が事象の地平線より小さくなったものがブラックホール

Tortoise座標

(t,r)に関して平坦な座標を取りたい

$$r_* = r + 2M \log \left| \frac{r - 2M}{2M} \right|$$

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)}$$

$$ds^2 = -f(r)(\underline{dt^2 - dr_*^2}) + r^2 d\Omega$$

平坦な(t,r)

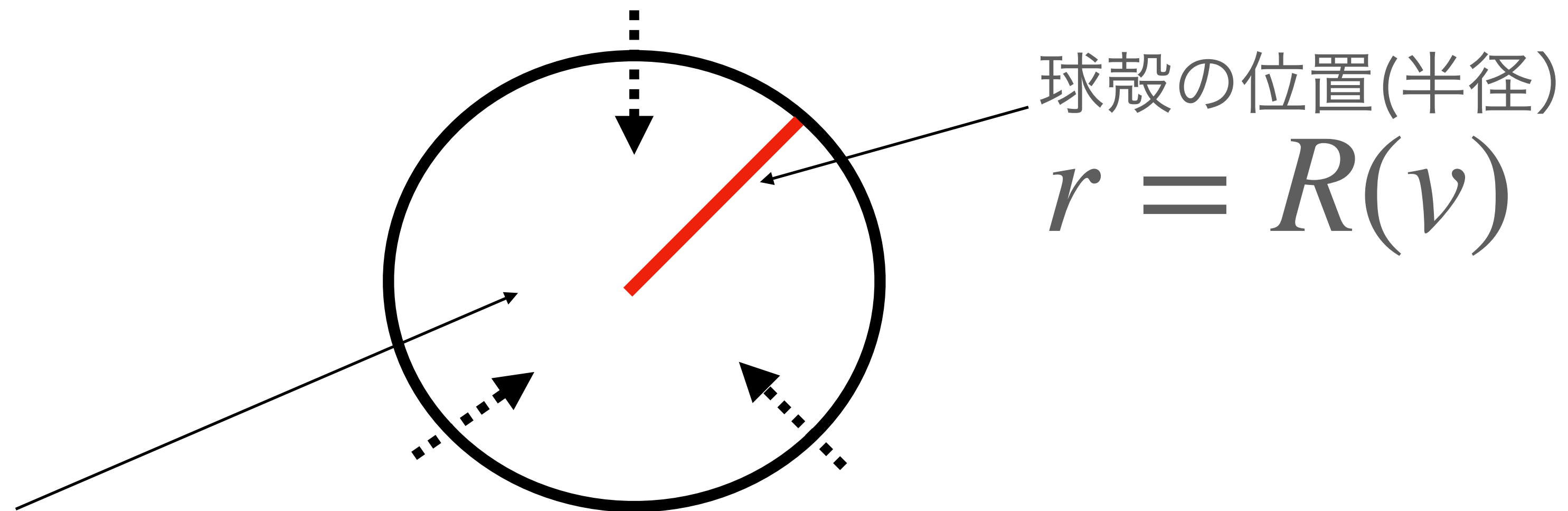
光錐座標

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_*$$

$$ds^2 = -f(r)du dv + r^2 d\Omega$$

球殻

球殻の外側はシュワルツシルド解



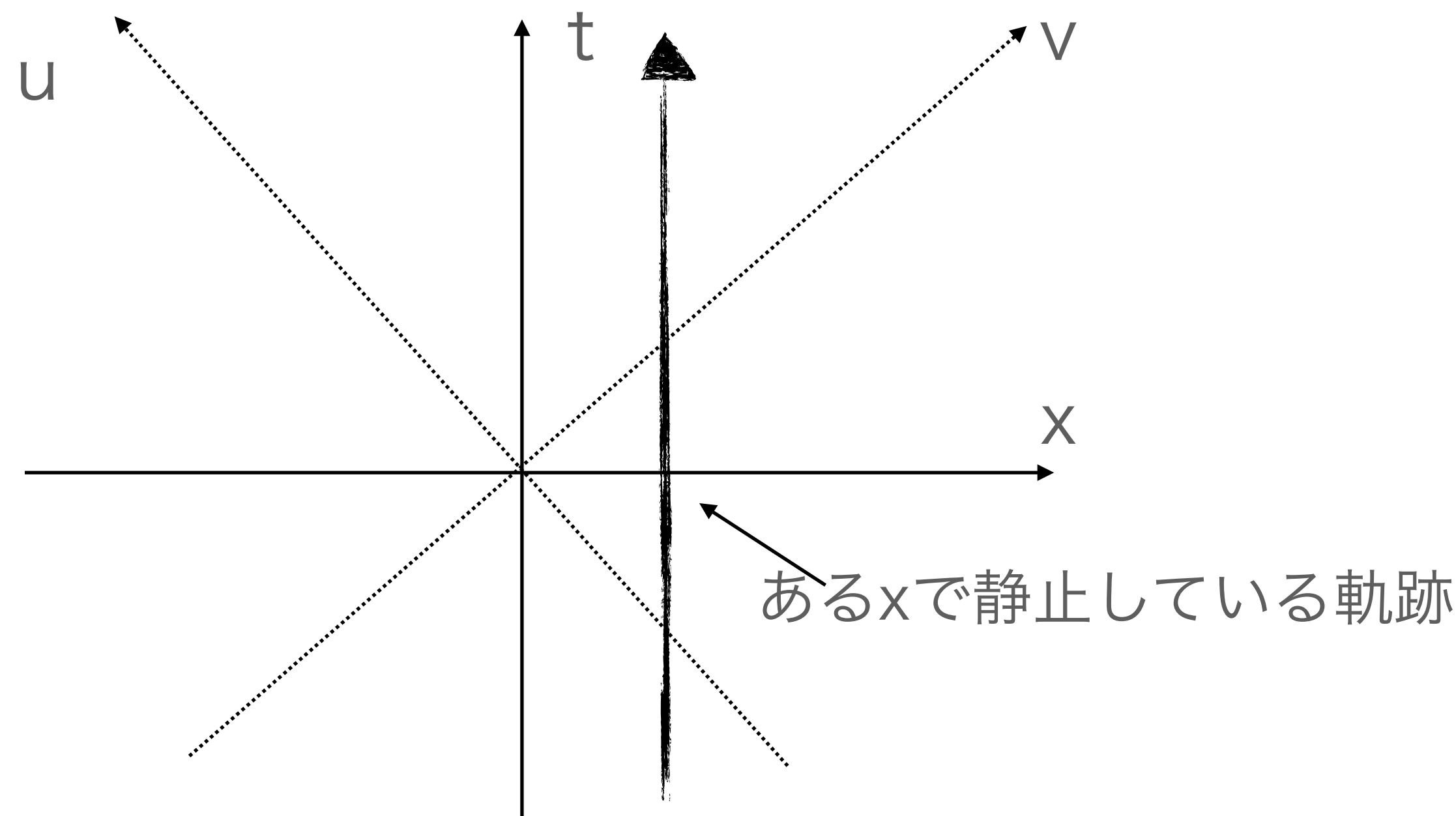
球殻の内側はミンコフスキー時空

$$ds^2 = dUdV \quad \begin{aligned} U &= \tau - r \\ V &= \tau + r \end{aligned}$$

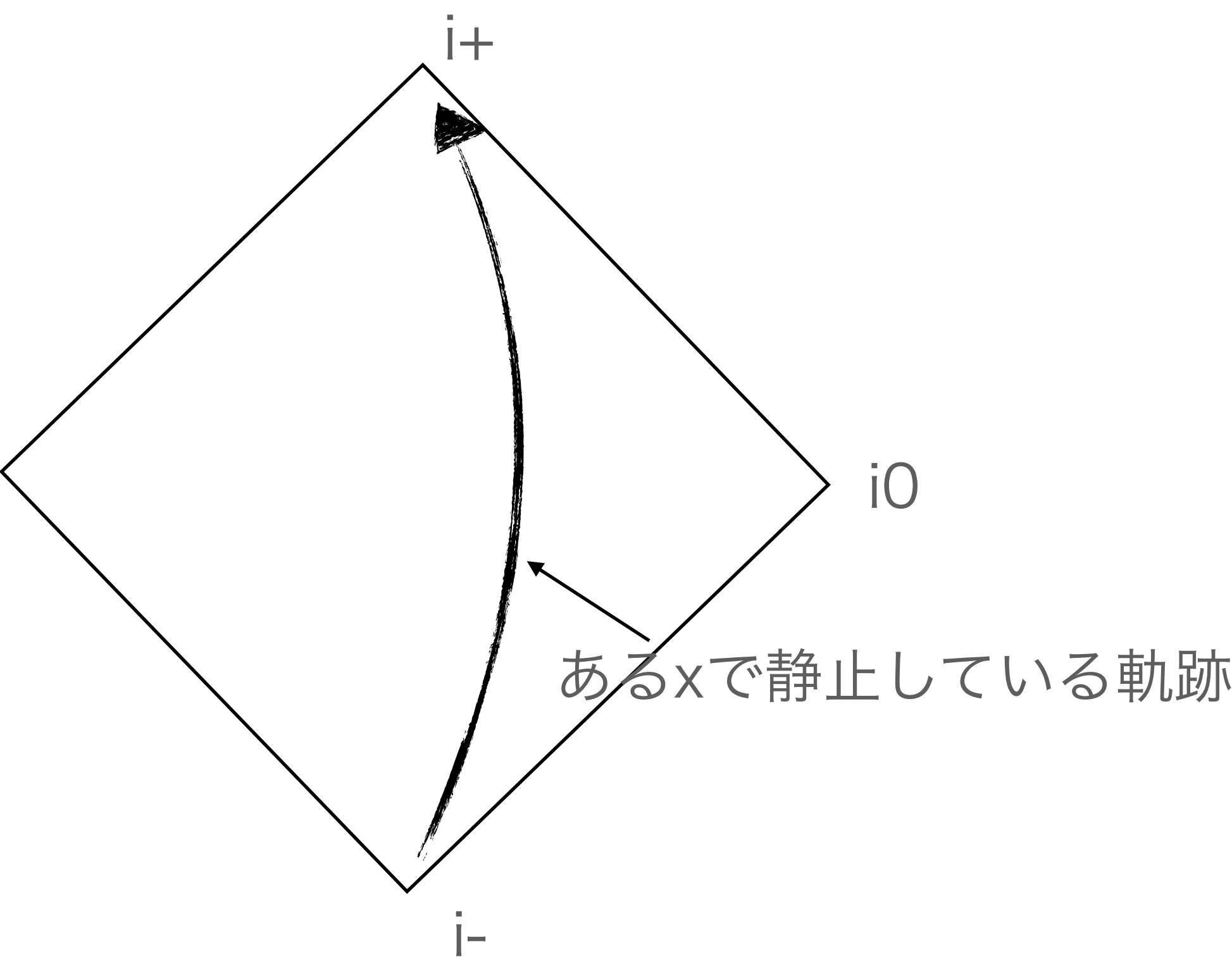
球殻は原点に
向かって落ちていくとする

ペンローズ図の見方

ミンコフスキー時空

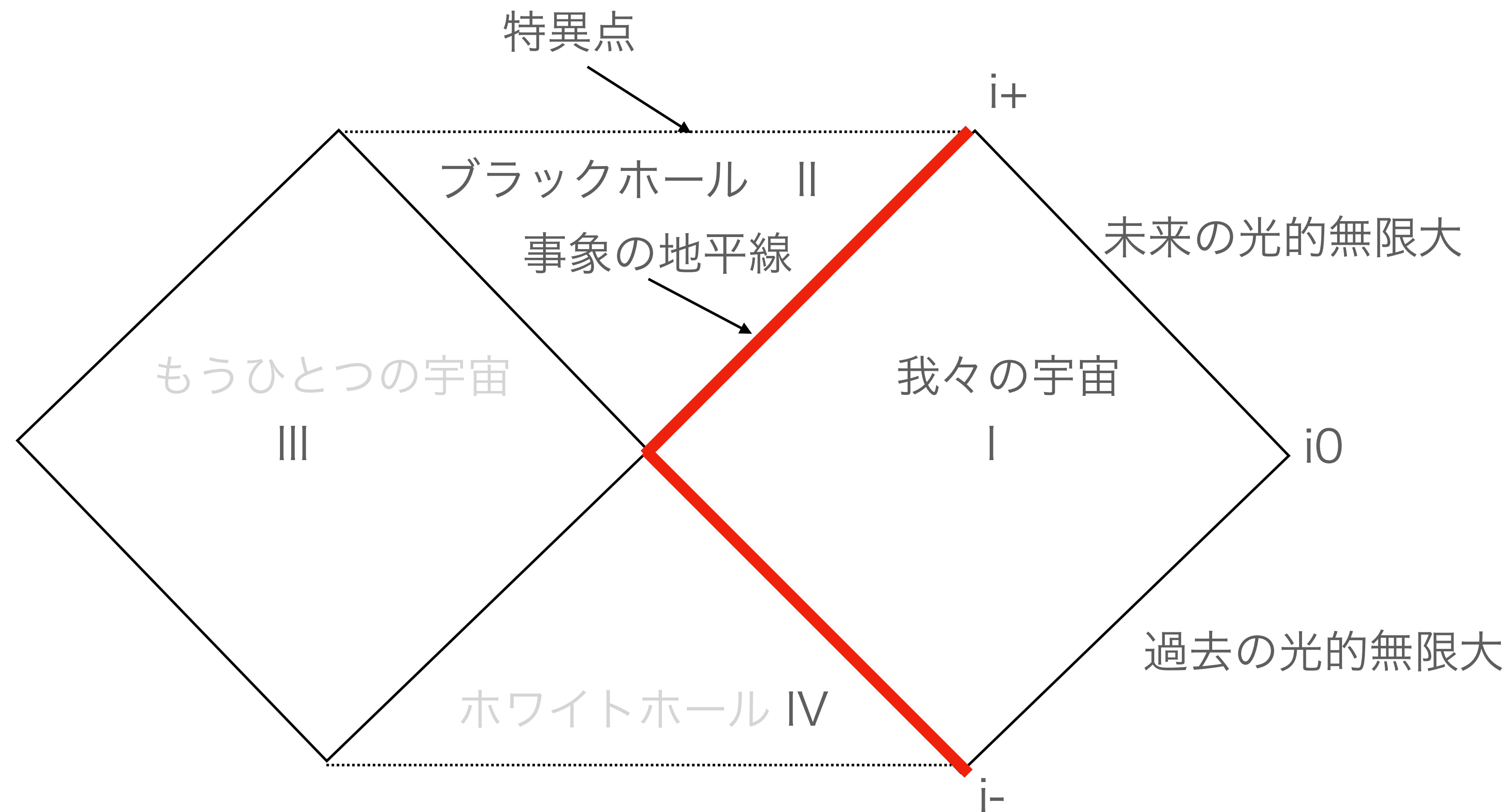


ミンコフスキー時空 のペンローズ図

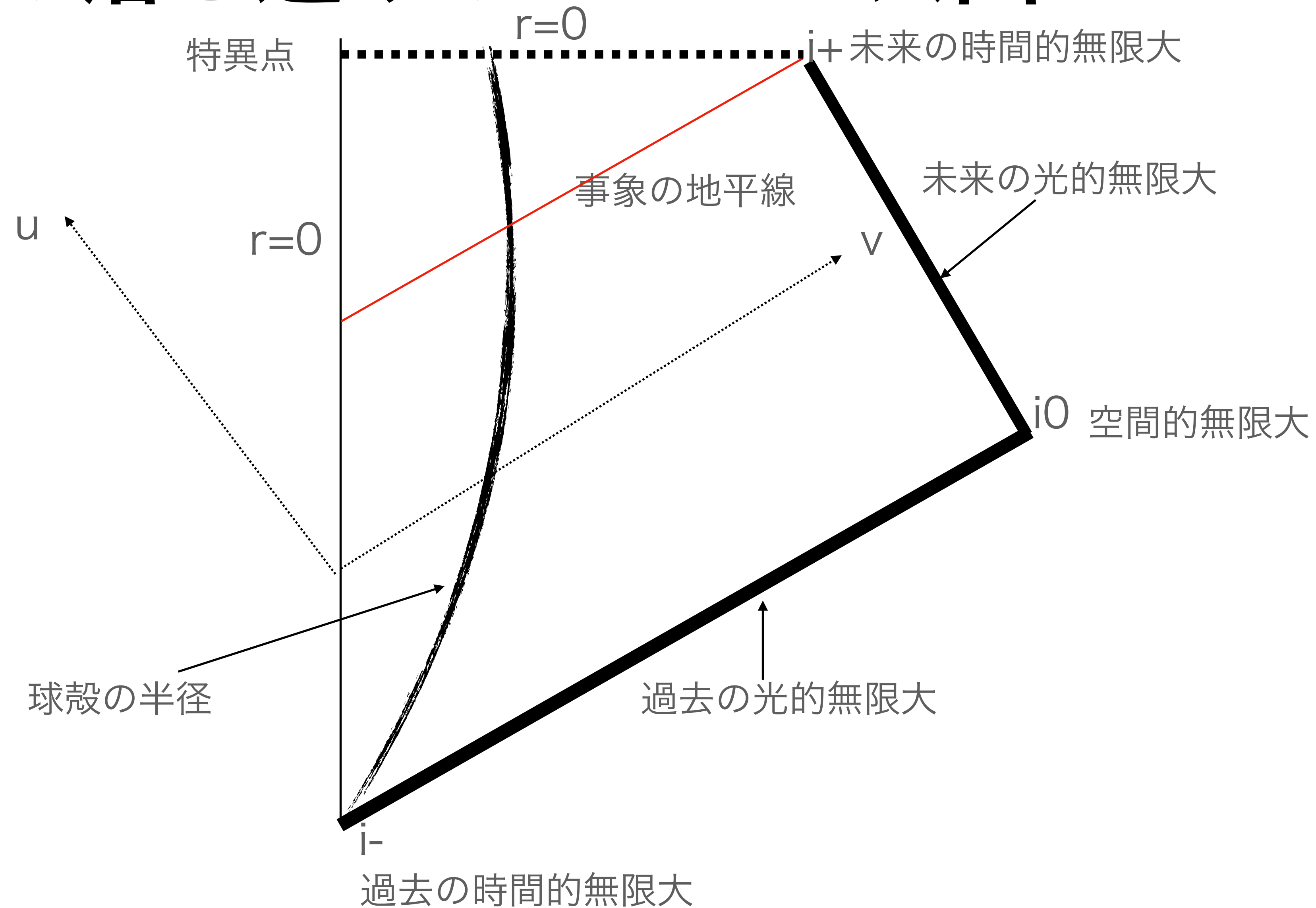


ペンローズ図の見方

シュバルツシルト解のペンローズ図



球殻の落ち込みのペンローズ図



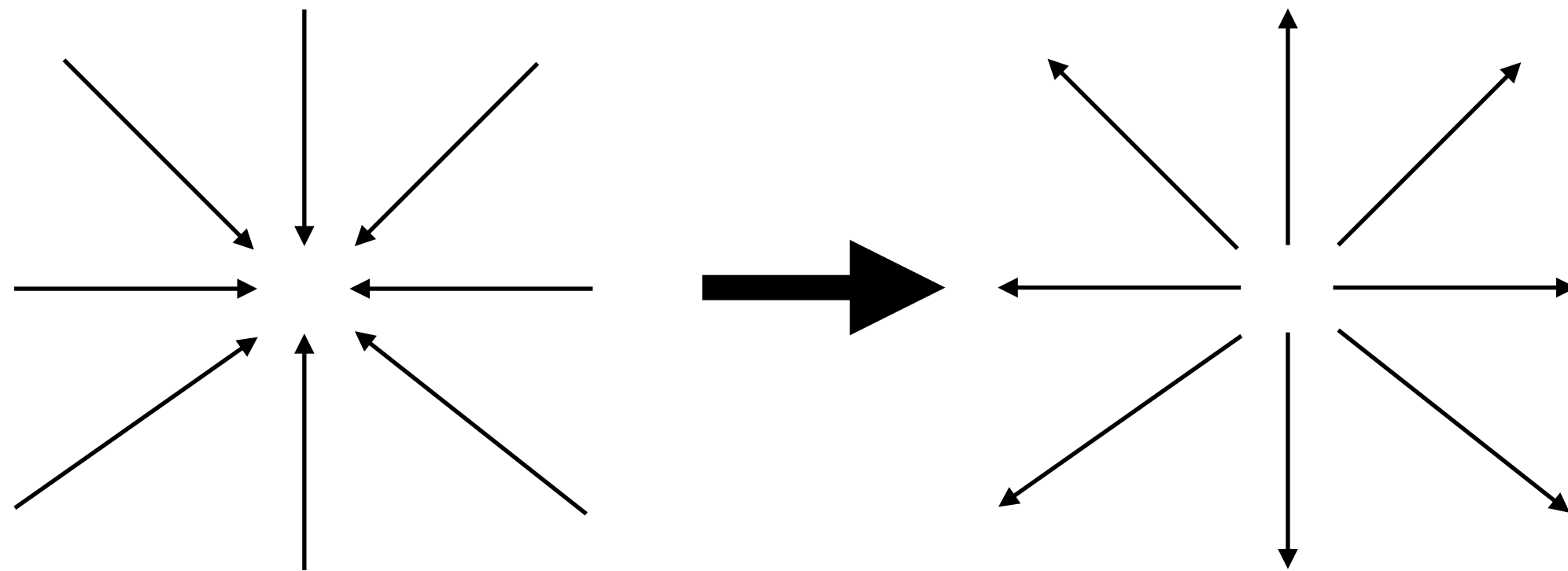
無質量スカラー場の境界条件

$$\square \phi(t, r) = 0$$

以下の議論はs波に限定する

$$\rightarrow \phi = F(u) + G(v)$$

原点における境界条件



原点においてディリクレ境界条件

$$\phi|_{r=0} = 0$$

2つの解の接続

球殻の外側：シュバルツシルト時空

$$ds^2 = -f(r)dudv + r^2 d\Omega^2$$

球殻の内側：ミンコフスキー時空

$$ds^2 = dUdV$$



球殻

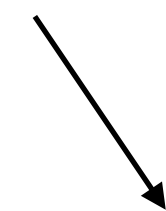
$$r = R(v)$$

でつながるように
座乗変換

座標間の変換

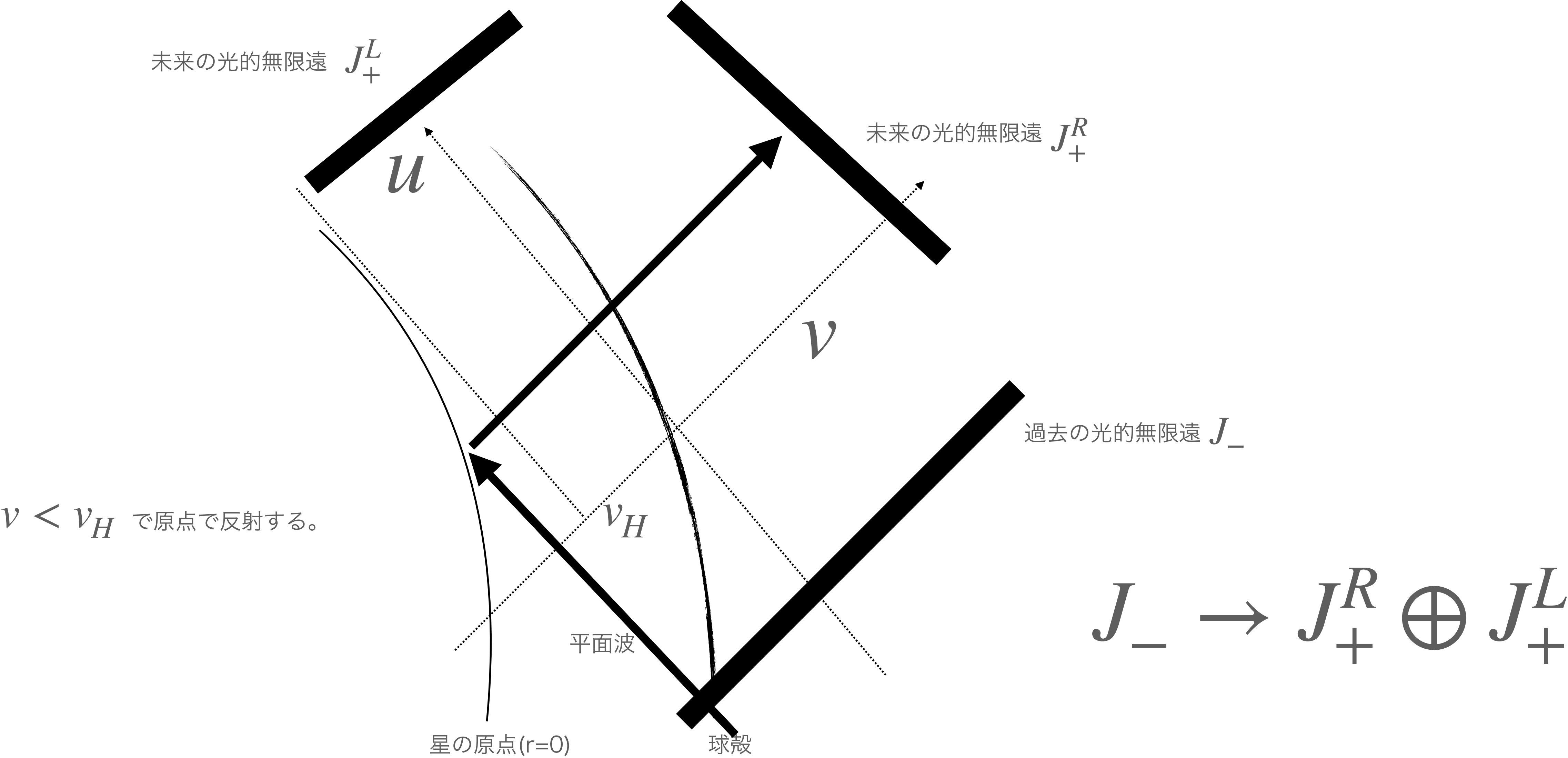
$$U(u) = p(u) = \underline{-4Me^{-u/4M}}$$

$$v = q(V) = -V + v_0 + 4M \equiv -V + v_H$$



$$R(v_0) = 2M$$

球殻の原点で反射されるもしくは透過される図



各領域での波動関数

J_-

$$\phi_\omega = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{4\pi\omega}} - \frac{e^{-i\omega q(p(u))}}{\sqrt{4\pi\omega}}$$

J_+^R

$$\phi_k^R = -\frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \left(e^{-iku} - \theta(v_H - v) e^{-iks(t(v))} \right)$$

$u = s(U) = -4M \log(U/4M)$

$V = t(v) = v_H - v$

J_+^L

$$\phi_k^L = \theta(v - v_H) \frac{k(v - v_H) e^{-ik/\kappa}}{\sqrt{4\pi k}}$$

KG内積より

$\kappa = \frac{1}{4M}$

各領域での場の演算子

$$J_- \quad \hat{\phi} = \int_0^\infty dw \left(\hat{a}_w \phi_w + \hat{a}_w^\dagger \phi_w^* \right)$$

$$\hat{a}_w |\text{in} - \text{vac}\rangle = 0$$

$$J_+^R \quad \hat{\phi}^R = \int_0^\infty dk \left(\hat{b}_k^R \phi_k^R + \hat{b}_k^{R\dagger} \phi_k^{R*} \right)$$

$$\hat{b}_k^R |0_R\rangle = 0$$

$$J_+^L \quad \hat{\phi}^L = \int_0^\infty dk \left(\hat{b}_k^L \phi_k^L + \hat{b}_k^{L\dagger} \phi_k^{L*} \right)$$

$$\hat{b}_k^L |0_L\rangle = 0$$

入力波と出力波の関係

$$\phi_w = \int_0^\infty dk \left(\alpha_{k,w}^R \phi_k^R + \beta_{k,w}^R \phi_k^{R*} \right)$$

(クライン-ゴルドン) 内積より

$$\alpha_{k,w}^R = (\phi_k^R, \phi_w)_{I_+^R} = \frac{1}{2\pi\kappa} \sqrt{\frac{k}{w}} \left(\frac{\kappa}{w} \right)^{-i\frac{k}{\kappa}} e^{\pi k/2\kappa} \Gamma \left(-i\frac{k}{\kappa} \right)$$

$$\beta_{k,w}^R = -(\phi_k^{R*}, \phi_w) = \frac{1}{2\pi\kappa} \sqrt{\frac{k}{w}} \left(\frac{\kappa}{w} \right)^{ik/\kappa} e^{-\pi k/2\kappa} \Gamma \left(i\frac{k}{\kappa} \right)$$



$$\hat{b}_k^R = \int_0^\infty dw \left(\alpha_{k,w}^R \hat{a}_w + \beta_{k,w}^{R*} \hat{a}_w^\dagger \right)$$

ボゴリューボフ変換

$$\phi_w \longleftrightarrow \phi_k^R$$

ボゴリューボフ変換の係数が得られ、
ホーキング放射のエネルギーが計算できる。

$$\hat{a}_w = \int_0^\infty dk \left(\alpha_{k,w}^{R*} \hat{b}_k^R + \alpha_{k,w}^R \hat{b}_k^L - \beta_{k,w}^{R*} \hat{b}_k^{R\dagger} - \beta_{k,w}^R \hat{b}_k^{L\dagger} \right)$$

$$\hat{a}_w | \text{in} - \text{vac} \rangle = 0$$

$$\left(\alpha_{k,w}^{R*} \hat{b}_k^R - \beta_{k,w}^R \hat{b}_k^{L\dagger} \right) | \text{in} - \text{vac} \rangle = \left(\alpha_{k,w}^R \hat{b}_k^L - \beta_{k,w}^{R*} \hat{b}_k^{R\dagger} \right) | \text{in} - \text{vac} \rangle = 0$$

$$\frac{\beta_{k,w}^R}{\alpha_{k,w}^{R*}} = \frac{\frac{1}{2\pi\kappa} \sqrt{\frac{k}{w}} \left(\frac{\kappa}{w}\right)^{ik/\kappa} e^{-\pi k/2\kappa} \Gamma\left(i\frac{k}{\kappa}\right)}{\frac{1}{2\pi\kappa} \sqrt{\frac{k}{w}} \left(\frac{\kappa}{w}\right)^{i\frac{k}{\kappa}} e^{\pi k/2\kappa} \Gamma\left(i\frac{k}{\kappa}\right)} = e^{-\pi k/\kappa}$$

ホーキング放射

$$|\text{in} - \text{vac}\rangle = \prod_k \frac{1}{\cosh \theta_k} \exp t_k \hat{b}_k^{\dagger R} \hat{b}_k^{\dagger L} |0_L\rangle \otimes |0_R\rangle \quad \tanh \theta_k = e^{-4M\pi k}$$

ブラックホールに落ち込むモードを見ないことに(trace out)すれば
温度 $T = \kappa / 2\pi = 1/8\pi M$ の熱分布になっている。

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}$$

まとめ

- ・ ホーキング放射を**ボゴリューボフ真空**にもとづいて簡単に説明した。
- ・ 原点に落ちていく球殻で記述したとき、原点におけるディリクレ境界条件が加速する鏡と同等な粒子発生の起源となる。
- ・ ブラックホールの蒸発による情報喪失問題とは、ブラックホールが完全に蒸発した場合、混合状態のみが残されるとすれば、**純粋状態が最終的に混合状態に至る**ことになり、これはユニタリ発展による通常の時間発展ではありえないことが問題となる。