# Double Field Theory の幾何学とゲージ対称性

北里大学大学院理学研究科博士課程 1 年　塩沢　健太 (Kenta SHIOZAWA)

**概要**

超弦理論は，その基本的物体を点粒子ではなく，1 次元的な拡がりをもつ物体，つまり弦であるとして構成された理論である．弦の余剰次元への巻き付きは，T 双対性という，異なる背景時空上の超弦理論同士を結びつける双対性を生じさせる．Double Field Theory (DFT) は，T 双対性が明白な超弦理論のフレームワークである．我々は，DFT の基礎となる幾何学とその上の対称性代数について議論した．この議論により，DFT のゲージ代数を幾何学的に構成することができた．本研究発表は論文 [1] に基づくものであり，森遥氏（北里大）との連続講演の後半部分である．

## 1　序論

重力の量子化は非常に難しい．超弦理論は，量子重力理論の有力な候補として，現在活発に研究されている．その最終的な目標は，重力の量子化と基本的な 4 つの相互作用の統一である．超弦理論は，その基本的物体を点粒子ではなく，1 次元的な拡がりをもつ物体，つまり弦であるとして構成された理論である．この弦の長さはプランクスケール（$\sim 10^{-35}$m）程度であり，エネルギーに換算すれば，おおよそ $10^{19}$GeV となる[*1]．現在，CERN の LHC で得られる事象は 13TeV $\sim 10^4$GeV であるから，弦は実験では観測することができない．超弦理論は現象とのすり合わせが難しいため，その指導方針はもっぱら既知の物理学と数学的整合性に求められる．中でも，対称性については理論を構築する上で重要な道具となる．

物理的な要請により，超弦理論は 10 次元時空に定義される．しかし，我々は時空間を 4 次元であると知覚しているため，残る 6 次元は認識できない形で小さくコンパクトになっている必要がある．これを余剰次元という．弦は 1 次元的な長さを持っているため，余剰次元に巻きつくことができる．この弦の余剰次元への巻き付きは，T 双対性という，異なる背景時空上の超弦理論同士を結びつける双対性を生じさせる．

T 双対性は超弦理論（及び，その低エネルギー有効理論である超重力理論）においては隠れた対称性となっている．理論における対称性は，明白に（共変的に）なっている方が議論しやすい．そこで，T 双対性を明白な対称性として持つような重力理論が提案された．それが Double Field Theory (DFT) である [2, 3]．T 双対性を研究することで，点

[*1] eV は電子ボルトという単位であり，電子が 1 ボルトの電圧で加速されたときに得るエネルギーである．

粒子の理論では見えない，超弦理論特有の効果を含む物理が得られると期待できる．超弦理論特有の弦の巻き付きの効果を含む物理については，例えば [4] で弦の巻き付きによって補正された時空について議論し，その有効性は弦理論におけるシグマ模型の方法を用いて [5] で議論している．

DFT は 2009 年に定式化されて以来，様々な方向の発展がある．しかし，そのほとんどは物理的な発展であり，その数理構造の解明は細々としたものであった．物理理論の基礎となる数学の発展は，物理理論への大きなフィードバックを生む．良い例が一般相対論である．古典的重力理論と同時期に発展したリーマン幾何学とは相互に触発し合い，さらなる発展を生んできた．かように物理理論にとり，その基礎の数理構造の解明は重要なものである．

DFT の大きな問題の一つは，ゲージ変換の有限形が明確な形では知られていないことであろう．つまり，DFT のゲージ変換は，それ自身が群を成しているのか，それとも違う代数的構造を成しているのかがはっきりしていない．これを数学的な言葉に書き直すと『コクシグル問題』と呼ばれる問題に帰着する．これは，亜代数 (algebroid) が積分できるかどうか，また積分した先の代数的構造はどのようなものか，という問題である[*2]．本研究 [1] の目的の一つは，DFT ゲージ代数がどのように構成されているかを明らかにすることである．これにより，DFT のコクシグル問題についてアプローチすることができると考えられる．

## 2　本論

DFT は空間を 2 倍に拡張することで，T 双対性を明白にする．2 倍に拡張された空間 $\mathcal{M}^{2D}$ は倍化空間 (doubled space) と呼ばれ，局所的には $\mathcal{M}^{2D} \simeq M^D \times \tilde{M}^D$ で与えられる．ここで，$M^D$ は通常の意味での時空間であり，$\tilde{M}^D$ はその T 双対である．そのため，DFT の局所座標は $(x^\mu, \tilde{x}_\mu)$ $(\mu = 1, \ldots, D)$ となる．$x^\mu$ は弦の運動量に，$\tilde{x}_\mu$ は弦の巻き付き数に，それぞれフーリエ共軛な量である．

かように DFT では自由度が倍になっているため，通常の物理を得るために半分の自由度を落とす拘束条件を課す必要がある．この条件は section 条件と呼ばれ，弱い拘束と強い拘束の 2 つの形式がある:

$$\text{弱い拘束：}\quad \partial^M \partial_M \Phi = 0,$$
$$\text{強い拘束：}\quad \partial^M \Phi \partial_M \Psi = 0.$$

[*2] Lie 代数の積分については，Lie の第 3 定理より Lie 群となる．

ここで $\Phi, \Psi$ は任意の DFT の場およびゲージパラメータである．弱い拘束は閉弦のレベル・マッチング条件から要請された条件であるが，強い拘束は弦理論に由来しない追加の条件で，ゲージ対称性が C 括弧（T 双対共変化された Lie 括弧のようなもの）で閉じることや，DFT の作用がゲージ不変であることなどから要請されたものである．

DFT の幾何はパラ・エルミート多様体 $\mathcal{M}$ で記述できることが知られている [6]．パラ・エルミート多様体では，パラ複素構造[*3]を用いることにより，接束 $T\mathcal{M}$ を 2 つの最大アイソトロピック部分束 $L, \tilde{L}$ に分割することができる．$L$ ($\tilde{L}$) に可積分条件，つまり，括弧積で閉じるという条件を課すと，$L$ ($\tilde{L}$) は葉層 (foliation) の接空間として書ける: $L = T\mathcal{F}$ ($\tilde{L} = T\tilde{\mathcal{F}}$)．$\mathcal{F}$ は葉層構造であり，葉 (leaf) と呼ばれる部分空間 $M_p$ の和 (union) として表される: $\mathcal{F} = \bigsqcup_p M_p$．この構造は，この葉 1 枚が通常の時空間を表していることを示す．チルダ付きの方も同様の議論が行え，葉 $\tilde{M}_p$ は時空間に対する T 双対ペアである．局所座標を用いれば，$M_p$ は $\tilde{x} = \text{const.}$ と，$\tilde{M}_p$ は $x = \text{const.}$ の空間であると定められる．かように，パラ・エルミート多様体は倍化空間の構造を自然に含む．

複素多様体の場合の類似で，パラ・エルミート多様体の部分束 $L$ (同様に $\tilde{L}$) の上には外積代数を定義することができる．$L$ と $\tilde{L}$ 上の外微分演算子はそれぞれ冪零性を満たすため，パラ・ドルボー・コホモロジーが定義される．$L$ と $\tilde{L}$ はともに $T\mathcal{M}$ の部分束であるため，多重ベクトル (multi-vector) の外積代数ということになる．多重ベクトルに括弧積[*4]を備えるとガーズデンハーバー代数という代数を成し，それが Lie 亜代数と等価であるという定理がある [7]．この定理を用いれば，$L$ ($\tilde{L}$) 上に Lie 亜代数を定義することができる．

我々は，$L$ と $\tilde{L}$ の上に Lie 亜代数構造を定義した．では，$T\mathcal{M}$ 上の代数構造はどのようなものなのであろうか．先行研究 [8] では，$L$ と $\tilde{L} \sim L^*$ が Lie 双亜代数であるとき，それらに対して Drinfel'd double という操作を行うと Courant 亜代数となることが知られている．いま，DFT のセッティングでは $(L, \tilde{L})$ は Lie 双亜代数ではないが，Drinfel'd double に類似の操作を行ってみよう．すると，$T\mathcal{M}$ 上に現れる代数構造は Vaisman 亜代数となることがわかる．この計算に現れる Vaisman 括弧は，まさに DFT に現れる C 括弧そのものである．したがって，無限小 DFT ゲージ変換の代数構造は Vaisman 亜代数であり，そのベースには $L$ と $\tilde{L}$ という double 構造があることがわかった．

[*3] 通常，複素構造 $J$ は $J^2 = -1$ を満たすが，パラ複素構造 $K$ は $K^2 = +1$ を満たす構造と定義される．

[*4] Schouten-Nijenhuis 括弧はスハウテン・ナイエンハンス括弧と読み，Lie 括弧の多重ベクトル版である．

## 3 結論

DFT の問題とは，ゲージ変換の有限形が明確な形では知られていないことだった．DFT におけるゲージ変換は一般化座標変換であるから，幾何学の大域的構造を知ることは有益であろう．また，無限小 DFT ゲージ変換の満たす代数構造とその幾何学的起源を知ることは，有限 DFT ゲージ変換の代数構造を解き明かすためには必要であると考えられる．

我々は，$L$，もしくは $\tilde{L}$ 上に外積代数を定義し，DFT における Lie 亜代数を構成した．また，その 2 つの Lie 亜代数 $L, \tilde{L}$ の double を考えることで，DFT ゲージ対称性代数としての Vaisman 亜代数を構成した．このように作った Vaisman 亜代数の括弧積は，まさに C 括弧と同一のものである．我々は DFT ゲージ対称性代数のベースにある double 構造を明らかにすることができた．これは，DFT のコクシグル問題に対するアプローチになっていると考えられる．

## 参考文献


[1] H. Mori, S. Sasaki and K. Shiozawa, "Doubled Aspects of Vaisman Algebroid and Gauge Symmetry in Double Field Theory," `arXiv:1901.04777`.

[2] C. Hull and B. Zwiebach, "Double Field Theory," *JHEP* **0909** (2009) 099 [`arXiv:0904.4664`].

[3] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, "Generalized metric formulation of double field theory," *JHEP* **1008** (2010) 008 [`arXiv:1006.4823`].

[4] T. Kimura, S. Sasaki and K. Shiozawa, "Worldsheet Instanton Corrections to Five-branes and Waves in Double Field Theory," *JHEP* **1807** (2018) 001 [`arXiv:1803.11087`].

[5] T. Kimura, S. Sasaki and K. Shiozawa, "Semi-doubled Gauged Linear Sigma Model for Five-branes of Codimension Two," *JHEP* **1812** (2018) 095 [`arXiv:1810.02169`].

[6] I. Vaisman, "Towards a double field theory on para-Hermitian manifolds," *J. Math. Phys.* **54** (2013) 123507 [`arXiv:1209.0152`].

[7] A. Vaintrob, "Lie algebroids and homological vector fields," *Uspekhi Mat. Nauk* **52** (1997) no.2(314), 161–162, translation in *Russian Math. Surveys* **52** (1997), no.2, 428–429.

[8] Z.-J. Liu, A. Weinstein, and P. Xu, “Manin Triples for Lie Bialgebroids,” *J. Differential Geom.* **45** (1997) 547 [dg-ga/9508013].

塩沢健太

1993 年生まれ．相模原市に 23 年居住している．神奈川県立相模大野高等学校卒業，北里大学理学部物理学科卒業，同大学院理学研究科博士課程 1 年次在学中．つまり，ほとんど相模大野駅周辺から動いていない．省エネルギーな生き物である．専門は超弦理論．