

統計力学における厳密解

東京大学 先端科学技術研究センター 助教 佐藤 純 (Jun Sato)

概要

私は統計力学と呼ばれる分野の研究をしていますが、中でも厳密に解ける模型に興味を持っています。本講演ではそれにまつわるお話を、非専門化向けになるべく分かりやすく紹介したいと思います。

1. 統計力学とは？

十分大きな箱があって、その中に1個、2個とビー玉を入れていきます。何個入れても箱の中にあるのはビー玉で、みな同じような性質を持っています。ビー玉どうし当たるとカチカチと心地よい音がして、何より透明できれいです。このような性質は、ビー玉をどんなにたくさん入れても当然変わることはありません。

一方、私たちの身の回りには、実に多様な性質を持った物質が存在しています。空気、水、金属、などなど、あげればきりがありません。空気は目に見えませんが、風が吹くとその存在を感じることが出来ます。川の水は冷たく、さらさらと流れますが、油はベトベトとまとわりつきます。金属の棒はとても硬いですが、消しゴムは力を入れればグニャッと曲がります。

さて、これらの全く異なる性質を持った物質は全て、「陽子」「中性子」「電子」というたった3種類の粒子からなっていることはご存知でしょう。先程のビー玉の話を思い出してください。これはものすごく不思議なことだと思いませんか？ビー玉は何個集めてもやはりビー玉でした。それに対し、たった3種類の粒子を「たくさん」集めてくることによって、これほど多様な物質世界が作り出されるのです。

一個一個の粒子が従う運動方程式はきちんと分かっています。にも関わらず、それが「たくさん」集まったとき、どのような性質が発現するのか、これは自明なことではなくて、解決すべき重要な問題となります。実は、今何気なく言った「たくさん」という言葉が鍵になってきます。ここからくりを明らかにしようとするのが、「統計力学」という学問です。

地球上の生命にとって、水は最も身近で不可欠な存在です。水は、「水分子」というたった1種類の分子がたくさん集まったものです。水分子もちろん、陽子、中性子、電子が何個か集まってきたものです。さて、たった1種類の「水分子」をたくさん集めただけなのに、「水蒸気」「水」

「氷」という全く性質の異なった形態をとるのはなぜでしょうか？「温度」の違いによって変わることは誰もが知っています。水を冷やすと氷になり、水を加熱すると沸騰して水蒸気になります。これを相転移と言います。では、その温度とは一体何なのでしょう？

温度というのは我々の生活にとって最も身近な物理量です。気温が低ければ寒いし、お風呂の温度が高すぎたら火傷してしまいます。ところが、1cm, 1mなどの「距離、長さ」、1秒、1時間などの「時間」に比べて、「温度」とは何か、実は一番よく分からない、難しい物理量です。温度変化などによる相転移の問題も、統計力学における重要な問題のひとつです。

また、「時間の矢」も統計力学における重要な未解決問題であり、果敢なみなさんの挑戦を待っています。冷たい水と熱い水を混ぜると、中間ぐらいのぬるいお湯になります。ところが、ぬるいお湯を放っておいたら、冷たい水と熱湯に分離した、ということは絶対に起こりません。つまり、不可逆性と言って、時間の流れる方向は一方通行で、逆向きにはならないということです。原子や分子は可逆な力学法則にしたがって運動しているはずなのに、それが「たくさん」集まると、不可逆になってしまうのです。

温度が一樣なぬるま湯の状態は、放っておいてもそれ以上変化が起こらないので、「平衡状態」と言います。それに対し、熱い部分と冷たい部分が分離している状態は「非平衡状態」といい、放っておくと平衡状態へと緩和していきます。この緩和の過程を「非平衡ダイナミクス」といって、私は「厳密に解ける模型」を用いてこれを解析、研究しています。

2. 厳密解とは？

対角線の長さが1mの正方形を描きたいとしましょう。実際にひとつ描いてみて、一辺の長さを測ってみるとおよそ70.7cmであることが分かります。したがって次からは、いちいち対角線を描かなくても、一辺が70.7cmの正方形を描けばいいことが分かります。「実用的」にはそれで十分です。さて、私たちは、一辺の長さ = $1/\sqrt{2}$ m という「厳密解」を知っています。1/√2 という厳密解は、70.7 という実測値以上の情報を持っているのでしょうか？

正方形の一辺の長さなら、丁寧に精密に測定すれば、十分に信頼できる値が得られるでしょう。ところが、統計力学で物理量を計算しようとする、どの程度正確かが明らかでない様々な近似計算に頼らざるを得ない場合がほとんどです。そのようなとき、一切の誤差を含まない厳密解による結果は、信頼性の観点から非常に意義のあるものとなります。

実は、そのような実用的な意味を超えたところにも、厳密解の面白さがあります。なぜ厳密に答えが求まったのか、そこには深い数学的背景がある場合がほとんどです。厳密解を求めることによ

って、実用的な意味を超えて、数学的に深い部分に到達できるのです。その美しい世界に魅了されて、厳密解を追い求めること自体にロマンを見出す。それが「統計力学における厳密解」なのです。

佐藤 純

1978年2月生まれ。1996年開成高等学校卒業，2002年東京大学理学部物理学科卒業，2007年同大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了。産業技術総合研究所特別研究員，日本学術振興会特別研究員を経て，現在東京大学先端科学技術研究センター助教。統計力学における厳密に解ける模型を用いて量子ダイナミクスを計算することに興味がある。非平衡統計力学の諸問題に対し厳密解を用いて研究している。