

世界に i は必要か？

首都大学東京理工学研究科 原田 浩充 (Hiromitsu HARADA)

概要

虚数 i 、もしくは複素数 $z = x + iy$ は計算の便宜上あるモノであって、現象の観測には関係ない、だろうか。 i を考えることで理解可能な現象が増えたら面白かろう。ここでは、複素数で考える関数が持っている様々な構造が、観測される物理的現象と関わっていることを説明する。特に、複素古典力学の特異点構造が量子力学的現象に深く関わっている例が明らかになったので、紹介する。ここで紹介する内容は、博士論文の内容の一部である。

1 序論

1.1 用語集

- 量子力学：
波動関数の確率解釈によって粒子の運動を記述する理論。電子等の小さい物体が対象。使用例：「俺の波動関数は 量子力学 的には宇宙の端っこにもある」等。
- 古典力学：
高校物理で習う、ニュートンの運動方程式を用いて、力のかかり方で運動を記述する理論。点粒子を対象とする為、「波動」関数を扱う量子力学とは相性が悪い。使用例：「俺は 古典力学 的にはココにいる」等。
- トンネル効果：
量子力学に従って考えた波動的粒子が、古典力学的には到達出来ない場所へ確率的に遷移する現象、または効果。音波が壁を越えて聞こえるのと原理は似ている。使用例：「この世界では トンネル効果 で壁をすり抜けて隣の部屋に行ける」等。
- 複素古典力学：
複素数で考えた古典力学。複素数にすることで空間が広くなり、粒子が通常では考えられない運動をすることがある。使用例：「この世界では 複素古典力学 に従って

壁をすり抜けて隣の部屋に行ける」等。

- ポテンシャル：

古典粒子の感じるエネルギー的障壁。例、重力ポテンシャル、電気ポテンシャル等。使用例：「俺は乃木坂の ポテンシャル が高いと感じる」等。

1.2 アンモニアメーザーとトンネル効果

アンモニア分子 (NH_3) の中の N 原子は 3 つの H 原子が作るポテンシャルの壁をすり抜けて振動し、メーザーを出す。メーザー発振の原理は、N 原子に注目し、 H_3 の壁を対称二重井戸型ポテンシャルに見立てて、二つの井戸に大きな振幅を持つ固有関数の重ね合わせによって理論的に説明される。この現象は、量子力学の典型的な現象であるトンネル効果によって起こっていて、トンネル振動として知られている [1]。

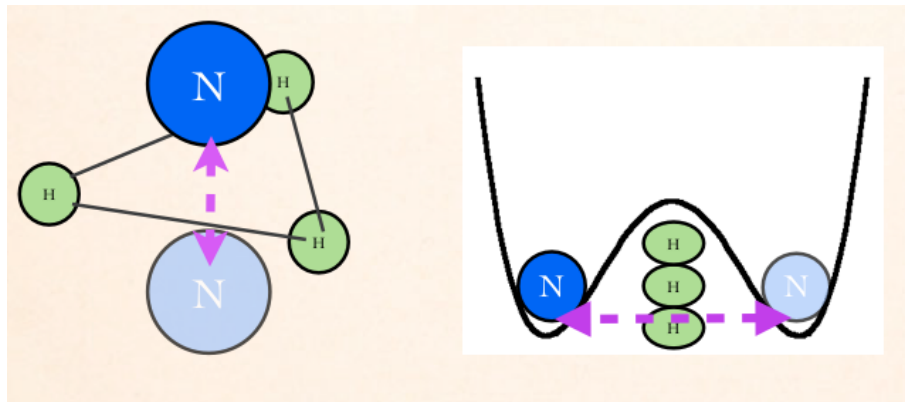


図1 アンモニア分子中の、水素原子の作る壁と窒素原子がトンネル振動するイメージ

トンネル振動の際の N 原子の運動を古典力学的に解釈しようとする、とたんに不可能であると思うだろう。なぜならば、古典力学的には、粒子は自身の持つエネルギーより大きいポテンシャルの壁を越える事は出来ないからである。このままでは N 原子は H_3 の壁を超える事ができない。しかし、力学変数を複素数に拡張すると、N 原子は H_3 の壁を超える事ができる。複素の古典力学に従い、複素空間を通る粒子は、ポテンシャルの壁を越えて運動し、トンネル効果を現す (図の紫の矢印)。良く知られている例としては、インスタントン粒子がある [2]。

1.3 i の必要性

アンモニアレーザーでは、対称 二重井戸型ポテンシャル系が理論計算のモデルであった。ここでは、もう少し拡張して、単なる二重井戸型ポテンシャル系において、インスタントのような複素の古典力学の運動の特異点が量子力学とどのように関係しているかをみる。先の例では、トンネル効果をわざわざ複素古典的に考えたという感じが拭えない。それはそれで面白いのであるが、複素古典的に考えることで新しく解ることがあったらより面白いだろう。

ここで紹介する計算自体は、論文 [3] おいて、各井戸の軌道の周期の計算で行われていた。私はその計算を複素古典軌道のリーマン面のトポロジーから再考し^{*1}、軌道の無限遠の留数と各井戸の作用に関係式があることを見出した [5]。それにより、無限遠の留数がボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件を満たせば、対称でない二重井戸型ポテンシャル系に於いても波動関数が各井戸に大きな振幅を持つ条件が満たされ、レーザー発振の原理と同様の議論が可能である事が解った。

より複雑なモデルへの拡張により、複素空間を考える事が現実世界のレーザー発振の原理等に「必要」であることが明言できれば、 i は「虚数」などという名前から脱却できよう。

2 本論

2.1 井戸の作用の関係式

アンモニアの N 原子のトンネル振動を良く記述する例として、四次多項式のポテンシャル（二重井戸型ポテンシャル）

$$V(x) = E - (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \quad (1)$$

の系を考えよう。ポテンシャルに E が入っていて少し通常の物理の教科書と違い、違和感を覚えるかもしれないが、運動の転回点を a, b, c, d にしたいからであり、議論の本質とは関係がないので許してほしい^{*2}。 $a < b < c < d$ とする。ポテンシャルは区間 $[a, b]$ 、 $[c, d]$ に井戸を持ち、古典粒子はそれらの区間をエネルギー E で振動運動する。

^{*1} この計算をした本当の目的は全く別の事を説明するためであった。そのため、トポロジーやリーマン面といった別の数学的対象が出てくる。

^{*2} 粒子のエネルギーが E の時、運動量（速度）が 0 となる点、 $E - V(x) = 0$ となる点を転回点という。

二つの区間 $[a, b]$ 、 $[c, d]$ の左右の井戸において、エネルギー E で、古典粒子はそれぞれ作用

$$S_{\text{左の井戸}} = \int_a^b p(x) dx \quad (2)$$

$$S_{\text{右の井戸}} = \int_c^d p(x) dx \quad (3)$$

を持っている。この二つは、運動量 $p(x)$ を複素関数と捉えたとき、以下の関係式を持っている [5]。

$$S_{\text{左の井戸}} = S_{\text{右の井戸}} - S_{\infty} \quad (4)$$

ここで S_{∞} は

$$S_{\infty} := \oint_C p(x) dx \quad (5)$$

であり、 C は無限遠点の周りを一周する閉経路である。無限遠点 $x = \infty$ において $p(x)$ は発散するため、 $p(x)$ の複素積分は留数をもつ。その留数が S_{∞} である。

2.2 ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件

量子力学での定常状態では、古典粒子の運動を反映して、各井戸に大きな振幅を持つ波動関数が現れる。ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件：

$$S = 2\pi\hbar \times \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad (6)$$

は作用関数 S がプランク定数 $\hbar$ の整数倍になる時^{*3}、井戸には固有関数が大きな振幅を持つ事を示している [4]。古典力学と量子力学の関係性をみる例である。

式 (4) から、二つの井戸の作用が同時にボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件 (6) を満たす為には、留数 S_{∞} が

$$S_{\infty} = 2\pi\hbar \times l \quad (7)$$

となれば良い事がわかるであろう。留数はパラメータ a, b, c, d によって簡単に具体的に与える事ができる。左右の井戸に大きな振幅をもつ固有関数を持つ条件が、 S_{∞} が量子化される事で決まる。我々はポテンシャルの形状をコントロールすることで、左右の井戸に大きな振幅をもつ固有関数を存在させる事が出来、(所謂エネルギー準位の擬交差が起こり、) トンネル振動を起こす事が出来る。

^{*3} 正確には $\hbar = h/2\pi$ で、 h がプランク定数。+1/2 は零点振動によるおまけ。 m とか l は整数。

3 結論

二重井戸型ポテンシャル系の例では、留数 S_∞ を量子化する条件： $S_\infty = 2\pi\hbar \times m$ が満たされれば、トンネル振動が起きる。我々人間は、パラメータを変える事で「複素構造（ここでは無限遠の留数）を介して」量子力学的現象が起きるかをコントロール出来る事になる。より一般的なモデルに於いても、同様の手法で複素構造と量子力学との関係を研究する事ができる。複素空間はもはや虚ろな世界ではなく、実数空間へ影響を与える重要な情報を持っているだろう。

参考文献

- [1] K. T. Hecht, *Quantum Mechanics*, New York: Springer-Verlag (2000)(教科書)
- [2] S. Coleman, *Aspects of Symmetry (selected Erice lectures)*, (Cambridge: Cambridge University Press) (1985) (教科書)
- [3] D. Khuat-duy and P. Leboeuf, *Appl. Phys. Lett.* **63** 1903 (1993) (論文)
- [4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* Third Edition: シッフ 量子力学 (上), 吉岡書店 (1970)(教科書)
- [5] H. Harada, *Doctoral Thesis* (2018)(博士論文)

原田 浩充

1987 年 12 月 18 日生まれ。駒場東邦高等学校中退後、大学入学資格検定に合格し、首都大学東京都市教養学部都市教養学科に入学、卒業。同大学院修士課程、博士課程修了。専門は複素古典構造とトンネル効果についての研究。IT 企業に勤務する予定。好きなアニメは新世紀エヴァンゲリオン。「マウス」の CM で乃木坂のポテンシャルが高いと感じる。