古典力学における観測者問題

放送大学大学院文化科学研究科　片桐　奏羽 (So Katagiri)

概要

観測理論とは観測対象と観測装置をあわせて一つの系とみなし、その系の相互作用によって測定という現象を記述する理論であり、量子力学において重要な役割を持つ。本研究において、古典力学おける観測理論を提案する。方法としてクープマン-ノイマンの古典力学の量子力学的定式化 [1, 2] において、ノイマンの観測モデル [4] においてエベレットの多世界解釈 [3] を適用し、古典状態の相対状態を定式化した。結果として古典力学の相対状態を用いた観測理論が構成された。

1　序論

物理において物理量を知るということは何を意味しているのだろうか。物理量を知るためには実験という行為が必要である。実験という行為は一つの物理的現象であり、量子力学においてはこれを観測理論として理論的に取り扱う事ができる。しかし、実験によって物理量を知るという行為は量子論に限らずすべての物理学における基礎のはずである。これを標語的にまとめれば以下のように書けるだろう。

定義. 物理学とは自然[*1]に介入してそこから物理量を取り出し、その物理量の関係から物理モデルを構築し、その物理モデルの予言力から物理モデルの妥当性を検討する学問である。

状態とそこから取り出される物理量の間の関係において、量子力学では理論の成立段階から物理量の代数関係の非可換性が起源となる不確定性関係[*2]により互いが非可換になる物理量の測定をめぐって観測問題に注目があつまった。ハイゼンベルグの思考実験による不確定性原理の提案 [3] は、不確定性関係と観測による対象への擾乱や測定誤差を混同していたがのちに観測理論の発展によって整備された [10]。

古典力学において観測者[*3]を理論の中に組み込むことは可能であろうか。古典力学においてなぜ観測という行為に焦点があたらなかったのかを量子力学の視点から眺めると古典力学においては物理量の間に非可換性がないことから、観測は状態が持つ物理量をそのまま取得する行為であるとみなせることで注目されてこなかったと推測される。しかし、もし古典力学においても観測行為を観測理論として定式化可能であれば、例えば古典物理に

[*1] 自然とは未定義であるがおよそ物理的現象が観測される対象である。

[*2] ハイゼンベルグの不確定性関係 [3, 8, 7]

[*3] ここで述べる観測者とは観測装置として測定する対象の物理量の情報を保存できる存在として捉えており、人間とは限らない [3]。

おける重要な思考実験であるアイシュタインの光時計の仮想実験 [2] を定式化することが可能になるはずである。

量子力学におけるエベレットの多世界解釈 [3] では観測者を観測対象と一緒に状態に組み込むことで観測の行為を相対状態*4として定式化することができることが知られている。この手法を古典力学でも用いることを提案したい。クープマンとノイマンの形式*5[1, 2] によって量子物理学の形式にそって古典物理学を記述できる。この形式では古典物理学が隠れた変数との非可換な代数によって記述される。本論文ではクープマンとノイマンの形式を用いてエベレットの相対状態の古典物理版を定義し、その観測モデルを構築することで古典物理学における観測理論を定義する。その観測理論を用いてアインシュタインの光時計の議論をした際に時刻合わせや距離の収縮といった過程を観測の問題として定式化することは次の論文で議論したい。

本論ではまずノイマンの観測モデル [4] を説明する。次にエベレットの相対状態を解説し、クープマンとノイマンの形式を解説した後、これらを用いてクープマンとノイマンの形式におけるエベレットの相対状態を定式化し、ノイマンの観測モデルにこれを適用する。

2　本論

2.1　量子論の枠組み

量子論では状態をベクトル

$$|\psi\rangle \tag{2.1}$$

で書く。物理量はベクトルの作用する演算子 $\hat{A}$ として*6

$$\hat{A}|\psi\rangle \tag{2.2}$$

のように状態に作用する。ベクトルは演算子の固有状態 $|a\rangle$ によって*7

$$|\psi\rangle = \int da|a\rangle\langle a|\psi\rangle \tag{2.3}$$

のように展開される。

$$\psi(a) \equiv \langle a|\psi\rangle \tag{2.4}$$

*4 射影仮説を採用せず、観測対象の系と観測装置の系の合成状態の和のそれぞれの項を状態とみなす。

*5 その運動方程式は KvN 方程式と呼ばれる。

*6 演算子を $\hat{A}$ のようにハットをつけて書いている。

*7 固有状態 $|a\rangle$ は $\hat{A}$ の固有値 a の固有ベクトルのことである。どの演算子の固有状態かを明記するために $|a\rangle_A$ と書くこともある。

は確率振幅と呼ばれる。

物理量として[*8]位置 $\hat{q}$ と運動量 $\hat{p}$ は

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar \tag{2.5}$$

という関係[*9]がある。$\hbar$ はプランク定数と呼ばれる量でおよそ 10^{-34}Js である。状態の時間発展はユニタリ演算子 $\hat{U} = e^{i\hat{H}t/\hbar}$ によって

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi\rangle \tag{2.6}$$

のように発展する[*10]。これを時間微分したものがシュレディンガー方程式である。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{2.7}$$

2.1.1　射影仮説

状態は観測[*11]した際に a という値が $|\psi(a)|^2$ の確率で取得できる (ボルンの確率解釈 [11])。

通常の解釈ではその際に状態は $|a\rangle$ に収縮するとされる (射影仮説 [4])。つまり時間発展は二種類ある。シュレディンガー方程式 (2.7) によるものと観測による確率の収縮によるものである。

2.2　ノイマンの観測モデル

系に観測対象とともに観測装置を組み込むために、本節ではノイマンの観測モデル [4] を紹介する。$\hat{q},\hat{p}$ を観測対象の位置と運動量に対応する演算子、$\hat{Q},\ \hat{P}$ を観測装置の位置と運動量に対応する演算子とする。

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar \tag{2.8}$$

$$[\hat{Q},\hat{P}] = i\hbar \tag{2.9}$$

$\hat{q},\hat{p},\hat{Q},\hat{P}$ の他の交換関係は 0 とする。

観測対象と観測装置の間の相互作用として

---

*8 非相対論的質点をここでは考える。
*9 正準交換関係と呼ぶ。
*10 $\hat{H}$ をハミルトニアンと呼び、エネルギーの物理量に対応する。
*11 この観測は射影測定と呼ばれる

$$\hat{U} = e^{i\hat{q}\hat{P}t} \tag{2.10}$$

のような時間発展を考える[*12]。初期状態を

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\eta\rangle \tag{2.11}$$

としたときにその時間発展は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \hat{U}|\psi\rangle \\ &= \int dq\langle q|\phi\rangle\hat{U}|q\rangle \otimes |\eta\rangle \\ &= \int dq\langle q|\phi\rangle e^{iq\hat{P}t}|q\rangle \otimes |\eta\rangle \\ &= \int dq\langle q|\phi\rangle|q\rangle \otimes e^{iq\hat{P}t}|\eta\rangle \end{aligned} \tag{2.12}$$

ここで $|\eta\rangle$ を $|Q\rangle$ で展開すると[*13]

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \int dqdQ\langle q|\phi\rangle\langle Q|\eta\rangle|q\rangle \otimes |Q+q\rangle \\ &= \int dqdQ\langle q|\phi\rangle\langle Q-q|\eta\rangle|q\rangle \otimes |Q\rangle \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる。ここで測定装置を射影測定すると測定装置 (の針) が x を得る確率は

$$\int dq\,|\langle q|\phi\rangle\langle x-q|\eta\rangle|^2 \tag{2.14}$$

で与えられる。ここで、測定装置の初期状態を $|0\rangle_Q$ とすればこの確率は

$$\int dq\,|\langle q|\phi\rangle\langle x-q|0\rangle_Q|^2 = |\phi(x)|^2 \tag{2.15}$$

となり、ボルンの確率解釈に一致する。

2.3　エベレットの相対状態

射影仮説は量子力学に固有な問題であるので古典力学において射影仮説を含めた観測理論を考えるのは概念的に困難である。よって本節では射影仮説を要求しない形式であるエベレットの多世界解釈を紹介する [3]。ノイマンの観測モデルにおいて

$$|\eta[q]\rangle \equiv e^{i\hat{P}qt}|\eta\rangle \tag{2.16}$$

[*12] 自由ハミルトニアン部分 (観測対象や観測装置個別のハミルトニアン) は簡単のために考慮しない。

[*13] $t = 1$ とした。

という記法を導入すれば

$$|\psi(t)\rangle = \int dq\langle q|\phi\rangle|q\rangle \otimes |\eta[q]\rangle \tag{2.17}$$

という記法が得られる。ここで

$$|q\rangle \otimes |\eta[q]\rangle \tag{2.18}$$

はエベレットの相対状態と呼ばれる。多世界解釈ではこの時、(2.17) の個々の相対状態において個々の観測装置は観測対象が $|q\rangle$ にあることを記録していると考える。よって射影測定をする必要はない。

2.4 古典力学の量子力学的記述

ここでは古典力学の量子力学的記述方法としてクープマンとフォン・ノイマンによる形式 [1, 2] を説明する。

この理論の本質は古典力学の各物理量に正準共役な隠れた変数を与えることにある。質点の場合、位置と運動量に対応する隠れた変数 $\hat{\pi}_q, \hat{\pi}_p$ を導入し、次のような演算子の交換関係を持つ代数を考える*14。

$$[\hat{q}, \hat{\pi}_q] = i \tag{2.19}$$

$$[\hat{p}, \hat{\pi}_p] = i \tag{2.20}$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = [\hat{\pi}_q, \hat{\pi}_p] = 0 \tag{2.21}$$

時間発展は次のようなハミルトニアンによるシュレディンガー方程式として記述される。

$$\hat{H} = -i\frac{\partial H}{\partial p}\hat{\pi}_q + i\frac{\partial H}{\partial q}\hat{\pi}_p \tag{2.22}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \tag{2.23}$$

この時、この波動関数の確率は

$$\mathrm{Pr}_\psi(x, p) = \langle\psi|x, p\rangle\langle x, p|\psi\rangle = |\psi(x, p)|^2$$

となる。

*14 KvN 代数と呼ばれる。

2.5　古典力学における観測モデル

以上のセットアップをもとに古典力学における観測モデルを構成する。観測対象の位置と運動量を $(\hat{q}, \hat{p})$、観測装置 (の針) の位置と運動量を $(\hat{Q}, \hat{P})$ とすれば、クープマン-フォン・ノイマンの形式に従うと、それぞれの物理量と隠れた変数が組になり、$(\hat{q}, \hat{\pi}_q), (\hat{p}, \hat{\pi}_p), (\hat{Q}, \hat{\pi}_Q), (\hat{P}, \hat{\pi}_P)$ が導入され、その正準交換関係は

$$[\hat{q}, \hat{\pi}_q] = i \tag{2.24}$$

$$[\hat{p}, \hat{\pi}_p] = i \tag{2.25}$$

$$[\hat{Q}, \hat{\pi}_Q] = i \tag{2.26}$$

$$[\hat{P}, \hat{\pi}_P] = i \tag{2.27}$$

とし、それ以外の組み合わせは 0 とする。

時間発展ハミルトニアンは

$$\hat{H} = -i\frac{\partial H}{\partial p}\hat{\pi}_q + i\frac{\partial H}{\partial q}\hat{\pi}_p - i\frac{\partial H}{\partial P}\hat{\pi}_Q + i\frac{\partial H}{\partial Q}\hat{\pi}_P \tag{2.28}$$

となるが、ここで H を

$$H \equiv -qP \tag{2.29}$$

とおけば[*15]

$$\hat{H} = -iP\hat{\pi}_p + iq\hat{\pi}_Q \tag{2.36}$$

であり時間発展は

$$\hat{U} = e^{-iP\hat{\pi}_p + iq\hat{\pi}_Q} \tag{2.37}$$

より、

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \hat{U}|\psi\rangle &= e^{-iP\hat{\pi}_p + iq\hat{\pi}_Q}|\phi\rangle|\eta\rangle \\ &= |\phi[-P]\rangle \otimes |\eta[q]\rangle \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$|\eta[[q]]\rangle \equiv e^{iq\hat{\pi}_Q t}|\eta\rangle \tag{2.39}$$

$$|\phi[-P]\rangle \equiv e^{-iP\hat{\pi}_P t}|\phi\rangle \tag{2.40}$$

と求まる。よって状態 $|\phi[-P]\rangle \otimes |\eta[q]\rangle$ は観測装置が観測対象の位置を記録し、同時に観測対象が観測装置の運動量を記録したとみなせる。

ここで $|\eta[q]\rangle$ について展開すると

$$\begin{aligned} |\eta[q]\rangle &= \int dQ'dP'|Q',P'\rangle\langle Q',P'|e^{iq\hat{\pi}_Q t}|\eta\rangle \\ &= \int dQ'dP'|Q',P'\rangle\langle Q'-q,P'|\eta\rangle \end{aligned} \tag{2.41}$$

同様に $|\phi[-P]\rangle$ についても展開すると、$|\psi(t)\rangle$ は

[*15] 古典力学の正準形式では位置と運動量の関数であるハミルトニアン $H(q,p)$ によって物理量は正準方程式 $\dot{A} = \{A,H\}_{pb}$ に従って時間発展する。ここで $\{A,B\}_{pb} \equiv \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}$ はポアソン括弧と呼ばれる。(2.29) は正準方程式を考えると

$$\dot{q} = \{H,q\}_{pb} = -Q \tag{2.30}$$

$$\dot{p} = \{H,p\}_{pb} = 0 \tag{2.31}$$

$$\dot{Q} = \{H,Q\}_{pb} = q \tag{2.32}$$

$$\dot{P} = \{H,P\}_{pb} = 0 \tag{2.33}$$

となり、これより

$$\ddot{q} = -q \tag{2.34}$$

$$\ddot{Q} = -Q \tag{2.35}$$

のようなバネ振動を表す。

$$|\psi(t)\rangle = \int dq'dp'dQ'dP'\langle q',p'+P|\phi\rangle\langle Q'-q,P'|\eta\rangle|q',p'\rangle\otimes|Q',P'\rangle \tag{2.42}$$

となる。ここで仮に射影仮説をとれば観測装置が (Q',P') に見つかる確率は

$$\mathrm{Pr}_{\phi,\eta}(Q',P') = \int dq'dp'\,|\langle q',p'+P|\phi\rangle\langle Q'-q,P'|\eta\rangle|^2 \tag{2.43}$$

であり、観測装置の初期状態を $|0,0\rangle_{Q,P}$ とすれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}_{\phi,\eta}(Q',P') &= \int dq'dp'\,|\langle q',p'+P|\phi\rangle\delta(Q'-q)\delta(P')|^2 \\ &= \int dq'\int dp'\,|\langle q',p'|\phi\rangle|^2\,\delta(q-Q') \\ &= \delta(q-Q')\end{aligned} \tag{2.44}$$

となる。よって、観測装置は観測量 q の値を確実に得ることができる。

3 結論

古典力学をクープマン-フォン・ノイマンの古典力学系に対する量子力学的形式で記述し、観測対象と観測装置のモデルとしてノイマンの観測モデルを使用した。その結果、古典力学においても量子力学と同等な形式で観測装置を導入できることがわかった。エベレットの相対状態についてはノイマンの観測モデルを用いると観測対象と観測装置が相互にお互いの状態の一部を記録する過程として記述できることがわかった。さらに続く研究として相対論の時刻あわせについてこの定式化による議論を行いたい。

謝辞. 本論文の原稿を読み、構成と内容について適切なコメントをくださいました弓林司博士に感謝致します。

参考文献

[1] Koopman, Bernard O. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 17.5 (1931): 315.

[2] Neumann, J. V. Annals of Mathematics (1932): 587-642

[3] Everett III, Hugh. "" Relative state" formulation of quantum mechanics." Reviews of modern physics 29.3 (1957): 454.

[4] Von Neumann, John. Mathematical foundations of quantum mechanics. No. 2. Princeton university press, 1955.

[5] Einstein, Albert. "Zur elektrodynamik bewegter körper." Annalen der physik 322.10 (1905): 891-921.

[6] Heisenberg, Werner. "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik." Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985. 478-504.

[7] Kennard, Earle H. "Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen." Zeitschrift für Physik 44.4-5 (1927): 326-352.

[8] Robertson, Howard Percy. "The uncertainty principle." Physical Review 34.1 (1929): 163.

[9] 白井仁人, et al. "量子という謎―量子力学の哲学入門." (2012).

[10] Ozawa, Masanao. "Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement." Physical Review A 67.4 (2003): 042105.

[11] Born, Max. "Quantenmechanik der stoßvorgänge." Zeitschrift für Physik 38.11-12 (1926): 803-827.

片桐 奏羽

1977 年 12 月 29 日生まれ。東京都立新宿高等学校卒業、筑波大学卒業、同大学院数理物質科学研究科博士課程単位取得退学。iOS アプリのフリーランスエンジニアとしてアプリ開発をする一方で放送大学大学院文化科学研究科に在籍し物理を研究中。専門は弦理論、量子論。