

コヒーレント状態を用いた量子古典対応

大妻女子大学非常勤講師（3期生） ○弓林 司 (Tsukasa YUMIBAYASHI)

東京大学先端科学技術研究センター 助教 佐藤 純 (Jun Sato)

概要

本発表では量子古典対応に就いて“場の理論に於ける coherent 状態”を構成し議論する。特に、この状態に対する量子古典時間発展を定義し、量子効果、及び、非線型性に由来する不安定性を議論した。

1 序論

量子論の基礎が完成して以来、量子論と古典論の対応は如何様に与えられる可きかという事に就いて議論が続いて来た。量子論と古典論の対応を与える方法に就いては、Ehrenfest の定理、WKB 解析等が挙げられるだろう。特に、確率解釈に於いては、古典論的な物理量は期待値として現れるということも。従って、量子古典的対応に於ける本質的な問いは、正準変数（作用素）の期待値が古典論（的振る舞い）に対応する様な、「良い」量子状態を見つける問題へと還元される。

本発表では「coherent 状態」[2]を用いた量子古典対応に就いて議論する。coherent 状態とは正準変数の期待値が古典的な振る舞いを持つ量子状態である。例えば、調和振動子の場合、coherent 状態（の位置表示波動関数）は、局在波を形成し、その形を変えることなく、古典的な粒子と正確に同じ周波数で振動することが知られている [3]。

特に、本発表では、場の理論に於ける coherent 状態を定義し、この状態の量子古典時間発展を定義、それらの間の差を調べる事で、coherent 状態が与える量子古典対応の安定性に就いて議論した。

本発表は東大先端研佐藤純氏との共同研究 [1] に基づく。

2 準備

2.1 量子場

まず量子場を準備する。

「場の作用素 $\psi(x, t)$ 」は以下の「同時刻交換関係」を満たす*1。

$$[\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}^\dagger(y, t)] = \delta(x - y), \quad (1)$$

$$[\hat{\psi}(x, t), \hat{\psi}(y, t)] = [\hat{\psi}^\dagger(x, t), \hat{\psi}^\dagger(y, t)] = 0. \quad (2)$$

「真空状態 $|0\rangle$ 」は以下を満たす。

$$\hat{\psi}(x, t)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\hat{\psi}^\dagger(x, t) = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (3)$$

「状態空間」は真空 $|0\rangle$ に「生成作用素 $\hat{\psi}^\dagger(x)$ 」を以下の様に作用する事で得られる。

$$|\varphi_N\rangle = \int dx_1 \cdots dx_N \varphi_N(x_1, \cdots, x_N) \hat{\psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_N) |0\rangle.$$

$\varphi_N(x_1, \cdots, x_N)$ は N 体波動関数に対応する。

上記の量子場作用素の「Hamiltonian」は以下の様に与えられる。

$$\hat{\mathcal{H}} = \int dx \left[-\hat{\psi}^\dagger \partial_x^2 \hat{\psi} + V(\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger) \right] \quad (4)$$

「Heisenberg 描像」において場の作用素 $\hat{\psi}(x, t)$ は以下の Heisenberg 方程式に従う。

$$i\partial_t \hat{\psi} = [\hat{\psi}, \hat{\mathcal{H}}] \quad (5)$$

この方程式の「形式解」は以下で与えられる。

$$\hat{\psi}(x, t) = e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{\psi}(x) e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}. \quad (6)$$

2.2 古典場

次に古典場を準備する。

量子場作用素 $\hat{\psi}(x, t)$ 及び $\hat{\psi}^\dagger(x, t)$ を、可換な複素 scalar 場（古典場） $f(x, t)$ 及び $f^*(x, t)$ に置き換えることを「古典化」と呼ぶことにする。

「Energy 汎関数」は、Hamiltonian (4) を古典化し、以下で与えられる。

$$E[f, f^*] = \int dx \left[-f^* \partial_x^2 f + V(f, f^*) \right] \quad (7)$$

*1 $[A, B] = AB - BA$.

この Energy 汎関数から「Poisson 括弧」

$$\{F, G\} := \frac{1}{i} \int dx \left(\frac{\delta F}{\delta f} \frac{\delta G}{\delta f^*} - \frac{\delta G}{\delta f} \frac{\delta F}{\delta f^*} \right). \quad (8)$$

を用いて、古典運動方程式は、

$$\partial_t f = \{f, E\}, \quad \partial_t f^* = \{f^*, E\}, \quad (9)$$

と書き換えられる。

特に、Poisson 括弧に対し、古典場 $f(x, t)$ 及び $f^*(x, t)$ は、「同時刻正準交換関係」

$$\{f(x, t), f^*(y, t)\} = \frac{1}{i} \delta(x - y) \quad (10)$$

を満たす。

2.3 Coherent 状態

$f(x, t)$ を古典運動方程式の解とする。ここでは初期時刻 $t = 0$ で soliton 解に対応する量子状態を準備する。

この量子状態は、本発表の主対象である「場の理論に於ける coherent 状態 [4]」で、以下で定義される。

$$|f\rangle := e^A |0\rangle, \quad A := \int dx \left[f(x) \hat{\psi}^\dagger(x) - f^*(x) \hat{\psi}(x) \right], \quad (11)$$

ここで $f(x) := f(x, t = 0)$ とした。また、規格化を $\langle f|f\rangle = 1$ とし、 $A^\dagger = -A$ を満たす。

Coherent 状態は、量子場作用素、古典場に対し、以下の関係式を満たす。

$$[\hat{\psi}(x), A] = f(x), \quad [\hat{\psi}^\dagger(x), A] = f^*(x), \quad (12)$$

$$\{f(x), A\} = i\hat{\psi}(x), \quad \{f^*(x), A\} = i\hat{\psi}^\dagger(x). \quad (13)$$

以上の定義、関係式より、この coherent 状態は量子場の作用素 $\hat{\psi}(x)$ の固有値 $f(x)$ に対応する固有 vector と成っている事が分かる。

$$\hat{\psi}(x)|f\rangle = f(x)|f\rangle. \quad (14)$$

更に、この期待値は、以下で与えられる。

$$\langle f|\hat{\psi}(x)|f\rangle = f(x), \quad \langle f|\hat{\psi}^\dagger(x)|f\rangle = f^*(x), \quad (15)$$

以上依り coherent 状態は量子場作用素 $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ を古典場 f, f^* へ古典化する事が分かる。

3 本論

ここでは coherent 状態の時間発展に就いて議論する。量子論に於いて、coherent 状態 $|f\rangle$ の時間発展は、

$$|f, t\rangle := e^{-i\hat{H}t}|f\rangle = e^{A(-t)}|0\rangle, \quad (16)$$

で定義される。ここで

$$A(t) := \int dx \left[f(x)\hat{\psi}^\dagger(x, t) - f^*(x)\hat{\psi}(x, t) \right]. \quad (17)$$

と置いた。この時、時刻 t に於ける量子場作用素に対する期待値は、

$$\langle f, t|\hat{\psi}(x)|f, t\rangle = \langle f|\hat{\psi}(x, t)|f\rangle, \quad (18)$$

を満たすが、これは $f(x, t)$ とは等しくない。

そこで、この「量子時間発展」に対し、coherent 状態の「古典時間発展」 $|\widetilde{f}, t\rangle$ を以下で定義し、これらの間のズレを議論しよう。

$$|\widetilde{f}, t\rangle := e^{\widetilde{A}(t)}|0\rangle, \quad (19)$$

$$\widetilde{A}(t) := \int dx \left[f(x, t)\hat{\psi}^\dagger(x) - f^*(x, t)\hat{\psi}(x) \right], \quad (20)$$

この状態の時刻 t に於ける期待値は

$$\langle \widetilde{f}, t|\hat{\psi}(x)|\widetilde{f}, t\rangle = f(x, t). \quad (21)$$

となり、 $f(x, t)$ に完全に一致する。

これらの状態は初期時刻 $t = 0$ で等しい。

$$A(0) = \widetilde{A}(0) = A, \quad |f, t=0\rangle = |\widetilde{f}, t=0\rangle = |f\rangle. \quad (22)$$

これらの時間発展は関係式

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{i}[A, \hat{H}], \quad \partial_t \widetilde{A}(t) = \{A, E\}. \quad (23)$$

に依り与えられる。

「coherent 状態の量子古典時間発展の差」を表す量 $r(t)$ を

$$r(t) := \langle f, t|\widetilde{f}, t\rangle = \langle 0|e^{-A(-t)}e^{\widetilde{A}(t)}|0\rangle, \quad (24)$$

で定義すると、 $t = 0$ で 1、そこから徐々に減退して行く。

これを微小時間 Δt で評価すると、

$$A(-\Delta t) = A - \Delta t \frac{1}{i} [A, \hat{\mathcal{H}}] =: A - \Delta t F, \quad (25)$$

$$\tilde{A}(\Delta t) = A + \Delta t \{A, E\} =: A + \Delta t G. \quad (26)$$

及び、Baker-Campbell-Hausdorff の公式に依り、

$$r(\Delta t) = 1 - ic\Delta t \int |f|^4 dx + c \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (27)$$

であることがわかる。これは 1 次の項が純虚数であるため $|r(\Delta t)|^2$ は 1 となる。

4 結論

coherent 状態は、微小時間の範囲、または、弱結合 $c \ll 1$ の範囲で「良い量子古典対応」を与える事が分かる。

参考文献

- [1] J. Sato, and T. Yumibayashi, “Quantum-classical correspondence via coherent state in integrable field theory”, [arXiv: 1811.03186]
- [2] J.R. Klauder, Ann. Phys. (U.S.A.) (11) 123 (1960).
S. Schweber, J. math. Phys. (3) 831 (1962).
- [3] R.J. Glauber, Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963).
R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
R.J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [4] S. Aoyama, Y. Kodama, Progr. Theor. Phys. **56**, (6) 1970 (1976).

弓林 司

1987年12月16日生まれ。東京都立科学技術高等学校卒業（3期生）、首都大学東京都市教養学部卒業、同大学院理工学研究科博士前期課程、及び、博士後期課程修了。元々、漫画『ドラえもん』や映画『Back to the Future』に憧れてタイムマシンを作る事を志し、物理の道へ足を踏み入れたが、師匠齋藤暁博士との出会いを経て、可積分系への深淵へと誘われ現在に至る。現在、大妻女子大学をはじめとする、幾つかの大学、専門学校で非常勤講師をする傍ら、研究を行う毎日。目標は人間になること。