

# Brane-World Cosmology

首都大学東京大学院 博士後期課程 3年 中田 洋 (Hiroshi Nakada)

## 概要

究極の理論の候補である超弦理論・M理論では理論の整合性から時空の次元は10、または11次元であることが予言されている。本発表では、我々の見ることができない余剰次元の取り扱い方と、Brane-Worldの描像における4次元の宇宙の進化と、宇宙の始まりを記述するEkpyrotic modelについて紹介する。

## 1 序論

物理学の大きな目的は2つあり、それは物質とその間に働く力の法則について解き明かすだけ簡潔に(美しく)説明すること、そして我々の住む宇宙がどのように始まりどうなっていくかを知ることである。現在、物質を構成する粒子(フェルミオン)、その間に働く力を媒介する粒子(ボソン)について記述する素粒子の標準模型が完成し、実験からもよく確かめられている。しかし、素粒子の標準模型は自然界にある4つの力のうち『電磁気力』、『弱い力』、『強い力』は記述できているものの、『重力』を含めることができていない。『重力』も含めることができる統一理論の候補としては『超弦理論』が提唱されており、10次元時空を運動する弦の振動の状態それぞれの粒子が表現されている。この超弦理論には5つの理論形式があり、それぞれ表現する対象が異なるが、それぞれの間には双対性と呼ばれる関係があることが知られている。さらに、この5つの超弦理論を統一する11次元の『M理論』の存在も提唱されている。

統一理論を考える上で、時空は4次元以上の高い次元を持つことが予言されたが、我々は普段は時間+3次元空間の4次元しか知覚できていない。それは、それ以外の次元(余剰次元)が何らかの機構で見えなくなってしまうからだと考えられる。そのような機構として、

- 余剰次元が見ることができないほど小さく閉じている。
- 素粒子の標準模型の粒子は3次元の膜(brane)の上に局在し、余剰次元方向に運動できない。

の2つがよく知られている。1つめの機構はKaluza-Klein理論[1]と呼ばれ、元々は5次元重力理論に4次元の重力と電磁気力を統一するために提唱された。2つ目の機構はBrane-Worldと呼ばれ、RandallとSundrumが階層性問題の解決のために提唱したこと

で有名となった [2]。

Friedmann は宇宙が一様等方であることを仮定し、宇宙の膨張・収縮を記述する Friedmann 方程式を導いた。当時、Einstein はこのような動的な宇宙を嫌ったため、宇宙の膨張を相殺するような効果を持つ『宇宙定数』を導入した。しかし、Hubble による銀河の赤方偏移の観測により宇宙が膨張していることが発見されると、宇宙は動的であり、高温・高密度の小さな火の玉のような状態から始まったとされる『ビッグバン宇宙論』が強く支持されるようになった。その後、(一時期宇宙定数は否定されたが) 観測技術の発展や素粒子物理学の応用により宇宙論も発展し、ダークエネルギーとしての宇宙定数  $\Lambda$ 、冷たいダークマター (Cold Dark Matter) を Friedmann 方程式に加えた  $\Lambda$ CDM モデルが現在の宇宙の標準模型として支持されている。しかし、( $\Lambda$ CDM モデルに限らず) ビッグバン宇宙論には幾つかの問題がある。『インフレーション理論』は、宇宙初期に指数関数的な膨張があったことを仮定することでこれらの問題を解決するために導入された。その問題とインフレーションによる解決法は次の通りである。

- 現在の観測では宇宙はほぼ平坦だが、初期宇宙ではより平坦でなければならない (平坦性問題)  
→ 宇宙初期に一気に引き伸ばされれば宇宙は平坦になり任意の初期条件が許される。
- 現在の観測では、過去に因果関係のなかった場所でも温度が同じである (地平線問題)  
→ 因果関係があった 2 点が宇宙初期に一気に引き離されれば同じ情報を持ち得る。

インフレーションを引き起こすスカラー場はインフラトンと呼ばれるが、インフラトンとそのポテンシャルがどのように導入されるかは非常に多くのモデルが存在する。スローロールインフレーション型のモデルはポテンシャルに平坦な部分が含まれていて、上の問題を解決できるほどの指数関数的な膨張を実現でき広く支持されている。インフレーションのモデルを区別するための観測量にスカラー・テンソル比がある。これは、宇宙初期の揺らぎによる宇宙マイクロ波背景放射の偏光の度合いである。

宇宙がインフレーションにより『始まった』とするならば、『時間』もその時に『始まった』と考えるのが自然だろう。これに対し、2001 年に Justin Khoury, Burt A. Ovrut, Paul J. Steinhardt, Neil Turok らによって発表された『Ekpyrotic model』は、Randall-Sundrum の brane-world の setup で、二枚の brane の衝突によって brane 上の宇宙で Big bang が生じ、それが繰り返し起こる宇宙モデルである [4]。このようなモデルを考えることで、宇宙は大局的にみて静的となり、時間に始まりはなく、ある意味で定常な宇宙を考えることができる。しかし、brane 間の相互作用を考えるために必要な超弦理論や M 理論は検証できる段階になく、宇宙の観測と整合しない部分があることから、支持はされ

ていない。

本発表では、宇宙論の考え方、余剰次元の取り扱いと Brane-World 描像における宇宙の進化、Ekpyrotic model の概要について紹介する。

## 2 本論

### 2.1 Freidmann equation and Big Bang Cosmology

Einstein の一般相対性理論の登場により、時空は動的な対象となった。Einstein equation は

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1)$$

である。ここで、 $R$  はスカラー曲率、 $R_{\mu\nu}$  はリッチテンソル、 $\Lambda$  は宇宙定数、 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー・運動量テンソルである。Einstein 方程式の左辺は時空の幾何学、右辺は物質の分布に相当する。つまり、物質の分布により時空の幾何学が決定される、という関係式になっている。

この Einstein の重力理論の登場で、宇宙が膨張・収縮する動的な研究対象となり、理論・観測共にこれまで著しい発展を遂げてきた。1921 年に Friedmann は一様等方な時空を仮定し、宇宙が時間発展するにつれて膨張・収縮することを表した Friedmann 方程式を導出した。一様等方な時空を表す metric は Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metric と呼ばれ、次のように書かれる。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2)$$

ここで、 $a(t)$  はスケール因子と呼ばれ宇宙の大きさを表し、 $K$  は空間の曲率を表し、 $-1, 0, +1$  の値をとる。この時空において、エネルギー・運動量テンソルは次の完全流体の形に制限される：

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (3)$$

$\rho$  はエネルギー密度、 $p$  は圧力を表し、 $u^\mu$  は単位速度ベクトルである。これらの量を Einstein 方程式に代入することで次の Friedmann 方程式を得ることができる。

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (4)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (5)$$

それぞれのエネルギー密度を無次元のパラメータ化した式は次のようになる：

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left[ \frac{\Omega_{0,M}}{a} + \frac{\Omega_{0,r}}{a^2} + \Omega_{0,K} + \Omega_{0,\Lambda} a^2 \right] \quad (6)$$

ここで、 $H_0$  は現在の Hubble 定数、それぞれの  $\Omega$  は宇宙を構成するエネルギーの割合となっており、次のような観測値により宇宙の進化が記述されている：

$$H_0 = 67.36 \pm 0.54 [km s^{-1} Mpc^{-1}], \quad \Omega_{0,m} = 0.0484, \quad \Omega_{0,CDM} = 0.258, \\ \Omega_{0,\Lambda} = 0.6847 \pm 0.0073, \quad \Omega_{0,r} = 0.0016 \quad (7)$$

## 2.2 Randall-Sundrum Brane-World

余剰次元を含んだ高次元時空の理論として、Randall と Sundrum が提唱した Brane-World model を紹介する。Brane-World model では、標準模型の素粒子が 3 次元の brane に局在していて、重力のみが余剰次元方向に伝わるため、余剰次元を見ることができない、という考え方である。Randall-Sundrum は 1999 年に 2 つの brane-model

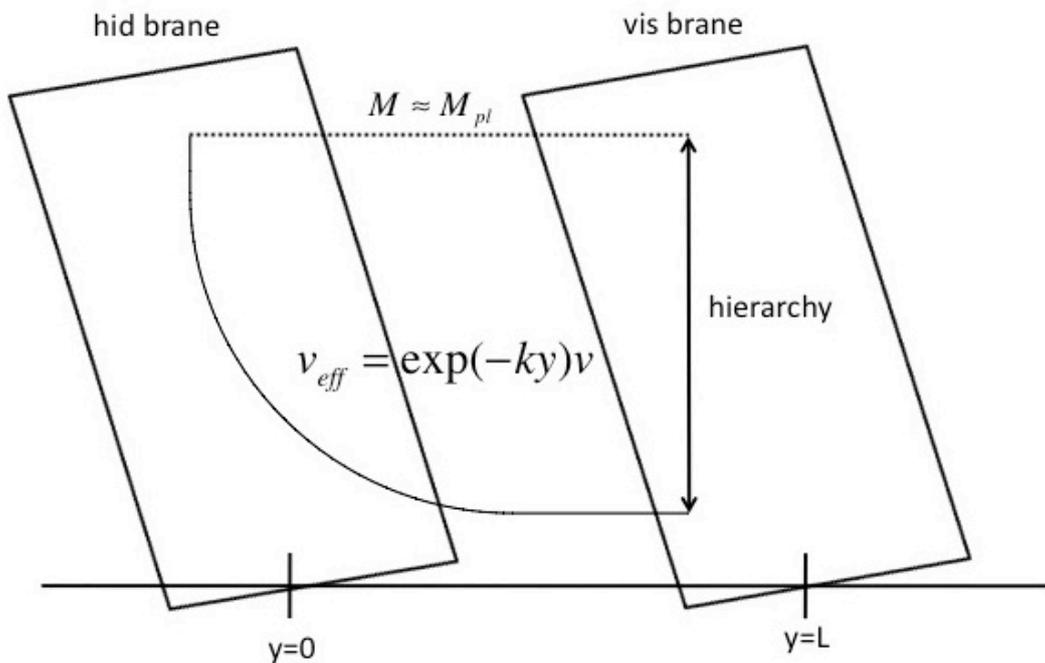


図 1 Generating the exponential hierarchy.

を発表した。1 つ目のモデル (RS1) は重力と電弱相互作用の間の階層性の解決のために提案された (図 1)。

余剰次元方向の  $y = 0$  と  $y = L$  の位置に絶対値は等しく符号が異なる張力を持つ brane が置かれており、余剰次元は  $S^1/Z_2$  orbifold となっている。Randall と Sundrum は brane 上での Poncare 対称性を考慮し、次のような 5 次元の Einstein 方程式の解を考

えた：

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (8)$$

ここで、 $e^{-2k|y|}$  は warp factor と呼ばれ、この幾何学的な効果により、 $y = L$  にある visible brane 上では階層性が生じる。

Randall-Sundrum の 2 つ目のモデル (RS2) はこの RS1 から brane を一つ無限遠に取り去ることで、無限に大きい余剰次元の導入に成功し、大きな注目を集めた。このモデルにおける宇宙モデルは、余剰次元中の場により様々な効果が生じたり、brane 自体が動くことで宇宙膨張を記述することができたり、興味深いモデルが存在する。

### 2.2.1 Brane-World Cosmology

RS2 model における、brane 上の宇宙の進化について考える。brane 上で FLRW 時空となるような 5 次元の metric を考え、5 次元の Einstein 方程式に代入することで、Brane-World 描像における Freidmann 方程式を得ることができる：

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3} \rho \left( 1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \frac{\Lambda_4}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{C}{a^4}. \quad (9)$$

この式は、式 (4) と比べて、 $\rho^2$  の項と  $C$  の項が足されている。 $C$  は、 $a^4$  で減衰していくことから dark radiation と呼ばれ、余剰次元の情報を含む項となっている。また、 $\rho^2$  の項が存在することで、 $\rho$  が大きな値を持つとき、即ち初期宇宙において、4 次元時空で考えた通常の宇宙の進化とは異なる振る舞いをすると考えられる。Big bang 元素合成以降の観測されている宇宙の進化と矛盾しないために、brane の聴力  $\lambda$  に対し制限をつけることで  $\rho^2$  の効果が現れないようにすることができる。

次に、Brane-World model を異なる視点からみてみる。次のような 5 次元の Schwarzschild-AdS metric を考える (図 2)：

$$ds^2 = -f(r)dT^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (10)$$

$$f(r) = k - \frac{\Lambda_5}{6}r^2 - \frac{\mu}{r^2} \quad (11)$$

この時空は 2 つの Schwarzschild 時空を張り合わせた時空であり、 $\mu$  は Black Hole の質量である。

この時空中で余剰次元  $r = r(\tau)$  に brane が位置してるとする。この時 brane 上の metric は  $dT = \dot{T}d\tau$ 、 $dr = \dot{r}d\tau$  として

$$ds_B^2 = -\left(f\dot{T}^2 - f^{-1}\dot{r}^2\right)d\tau^2 + r^2(\tau)\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (12)$$

と書ける。brane が動径方向 (r 方向) に運動しているとき、その速度ベクトルは

$$u^A = \left(\dot{T}, 0, 0, 0, \dot{r}\right) \quad (13)$$

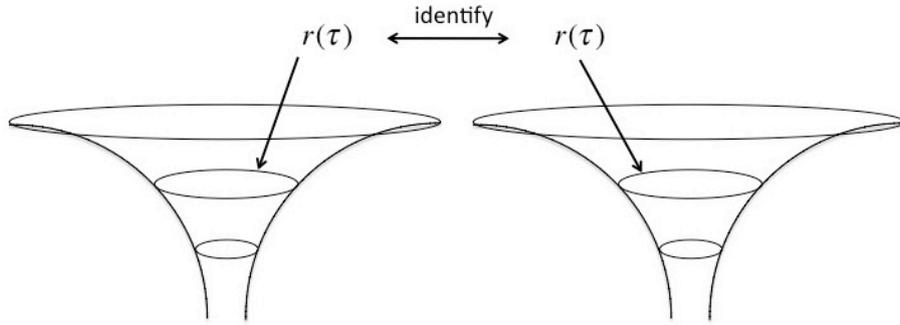


図2 Five-dimensional Schwarzschild-AdS spacetime

と書くことができ、これに直行するベクトルは

$$n_A = (\dot{r}, 0, 0, 0, -\dot{T}) \quad (14)$$

と書くことができる。これらを用いると、この時空の接続条件 ( $r = r(\tau)$ ) で時空が連続から次の関係式を導くことができる：

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} = \frac{\kappa_4^2}{3} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right) + \frac{\Lambda_4}{3} - \frac{K}{r^2} + \frac{\mu}{r^4} \quad (15)$$

これは brane 上の Freidmann 方程式を表し、brane の動径方向の運動が宇宙の膨張に対応している。dark radiation  $\mu$  は 5 次元の Black Hole の mass に対応していることがわかる。

### 2.3 Ekpyrotic model

Ekpyrotic model の描像は、単純には上の RS1 の二つの brane が衝突したり、brane 間に働く引力を考えることで、宇宙の始まりと現在の加速膨張を引き起こす dark energy を記述することができる (統一理論由来の) モデルであり、インフレーション理論の代わりに初期宇宙を記述できることを期待されている。また、そのような brane の衝突が繰り返し起こることで、big bang と big crunch を繰り返す、大局的に定常な宇宙を記述を可能とするモデルである (Cyclic universe)。

インフレーション理論が解決した Big bang 宇宙論の問題点は、次のように解決される：

- 平坦性問題

brane 同士の衝突前の contracting phase を経ることで、宇宙が flat にされる。

- 地平線問題

Big bang 以前に十分な時間があるため、空間が一様な情報を持つことが可能となる。

- 初期宇宙の量子ゆらぎ

インフレーション理論では初期宇宙におけるインフラトンのゆらぎにより、宇宙の大規模構造や銀河の構造形成の種となると考えられている。Ekpyrotic model では、それぞれの brane 上にさざ波があることで、brane の衝突が全ての場所で同一時刻に起こらず、結果として初期宇宙における量子ゆらぎが生成されると考えられている。

Ekpyrotic model において、brane の運動を 4 次元の effective theory の 1 つのスカラ場 potential で記述し、それを用いて上記のことを定式化して説明している。しかし、Ekpyrotic model では曲率のスカラ場摂動のスペクトルが宇宙背景放射から観測されているスペクトルと整合しない。このことから、2007 年に Evgeny I. Buchbinder, Justin Khoury, Burt A. Ovrut らは複数のスカラ場を導入し、観測と整合するスペクトルを得ることができるモデルを提案している (new Ekpyrotic model)[5]。

Ekpyrotic model は理論、実験ともに検証が足りない model であり、

- 統一理論からどのように導出するか。(moduli stabilization, no-go theorem 等)
- brane の衝突と前後の phase transition はどのように計算されるか。

などの大きな問題が残されている。

インフレーション理論と Ekpyrotic model は同じ問題を解決するが、初期宇宙における重力波のスペクトルによって区別することができるため、近い将来、どちらのモデルが正しいか証明される日が来ると考えられている。

### 3 結論

現在の宇宙の進化を記述する  $\Lambda$ CDM モデルと Brane-World における宇宙の進化及び定常的な宇宙を記述できる可能性がある Ekpyrotic model について紹介した。Ekpyrotic model はまだまだ SF の域を出ないと言っていいほど定式化されきっていないモデルであるが、統一理論から予想されるモデルとしての一貫性と、定常的な宇宙を記述するモデルとして非常に魅力的なモデルではある。このモデルのような、自由な発想を持って研究に挑んでいきたいし、高校生の皆様にも挑戦して頂きたい。

## 参考文献

- [1] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math.Kl., Berlin Math. Phys., Bd. K1 966 (1921), O. Klein, Z. Phys. 37, 895 (1926).
- [2] L. Randall and R. Sundrum, A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension, Phys. Rev. Lett.83,3370, hep-ph/9905221.
- [3] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. **B91** (1980) 99.
- [4] Justin Khoury, Burt A. Ovrut, Paul J. Steinhardt, and Neil Turok, The Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang, Phys.Rev. D64 (2001) 123522, hep-th/0103239.
- [5] Evgeny I. Buchbinder, Justin Khoury, and Burt A. Ovrut, New Ekpyrotic cosmology, Phys.Rev. D76 (2007) 123503, hep-th/0702154.

中田 洋

1988年9月7日生まれ。東京都立小金井北高等学校卒業、東京理科大学卒、首都大学東京理工学研究科博士後期課程3年次在学中。指導教官の Sergei V. Ketov 先生の下で高次元時空における修正重力理論によるインフレーションモデルの研究中。幼少期の夢は宇宙飛行士であったが宇宙そのものへの興味が大きくなり物理学の道へ。2019年3月25日に博士号を取得(予定)、4月から業務コンサルティングを行う株式会社 Solize に就職(予定)。