DFT の局所対称性に現れる数学的構造

北里大学大学院理学研究科修士課程 1 年 森 遥 (Haruka MORI)

概要

この講演は、共同研究者である塩沢健太氏の講演と関連する。弦理論は、量子重力理論の候補として注目されている理論である。今回扱うのは、弦理論特有の双対性である T 双対性を明白に含んだ Double Field Theory (DFT) という理論と、それに関連する数学についての話題である。

1 序論

そもそも、ある理論が「物理的に正しい」ことはどのように保証されるのだろうか？

一般相対性理論は古典的な重力理論として広く知られている。この理論が古典的重力を記述するのに本当にふさわしいのか、ということは実験的にも様々な方向から確かめられており、その結果から最早疑いようがない。また、一般相対性理論は数学的には Riemann 幾何学と密接に結びついており、数学的にも美しい記述が与えられる。

物質の根源とされる素粒子の相互作用は、強い力・弱い力・電磁気力・重力の 4 種類が存在する。このうち、量子化ができていないものは重力だけであり、「重力の量子化」は現在の理論物理学において大きな課題である。量子重力理論の有力な候補として、弦理論が考えられている。もし弦理論が“物理的に正しい”ならば、一般相対性理論の場合と同様に、実験・観測結果とも整合性が取れて、かつ理論を記述する数学とも上手く対応がとれるだろうと考えられる。しかしながら、弦理論のエネルギースケールは非常に高く、現在の技術では弦理論が正しいかどうかを実験で確認することは不可能である。この点において、弦理論を記述するような数学は存在するのか？という問いは、物理的な立場から考えても重要度を増す。この講演では、弦理論とともに現れる興味深い数学的構造について眺めていく。

2 本論

弦理論では、点粒子 (質点) ではなく弦を用いて時空を調べる。弦理論における大きな特徴として、T 双対性の存在があげられる。これは、弦が点粒子と違って長さを持ち、巻きつきを考えられることに由来する。弦の全エネルギーを記述するには、弦自体の運動量だけではなく、弦の張力に由来するエネルギーも考えねばならない。弦のエネルギー E

は、おおよそ次のように書ける。

$$E \propto \left(\frac{n}{R}\right)^2 + (mR)^2 \quad (1)$$

右辺 1 項目は弦の運動量に由来し、2 項目は弦の張力に由来する。 n, m はそれぞれ運動量と張力に由来する量子数である。 T 双対性は、端的に言えば巻きついた弦の半径を R として組み立てた理論と、半径をその逆数 $1/R$ として組み立てた理論が同じになり、互いに区別できないということを意味している。

Double Field Theory (DFT) は、T 双対性を明示的に含んだ重力理論である。これは、通常は D 次元の時空座標を、倍の $2D$ 次元にすることで実現されている。DFT における局所対称性 (ゲージ対称性) を記述するものとして、C-bracket と呼ばれる括弧積が与えられている [1, 2]:

$$\begin{aligned} [\Xi_1, \Xi_2]_{\text{C}} &= [X_1, X_2] + \mathcal{L}_{\xi_1} X_2 - \mathcal{L}_{\xi_2} X_1 - \frac{1}{2} \tilde{d}(\iota_{X_2} \xi_1 - \iota_{X_1} \xi_2) \\ &\quad + [\xi_1, \xi_2] + \mathcal{L}_{X_1} \xi_2 - \mathcal{L}_{X_2} \xi_1 + \frac{1}{2} d(\iota_{\xi_1} X_1 - \iota_{\xi_2} X_2). \end{aligned} \quad (2)$$

C-bracket の特徴は、**Jacobi 恒等式**を満たさないという点である。したがって、DFT の局所対称性の背景にある代数構造は少なくとも Lie algebra ではない別の構造である。これは、時空を点粒子で調べる場合と弦で調べる場合で対応する代数が実際に異なる、ということを示している。この構造の名称は文献によって揺れがあるため、本講演では提唱者である Vaisman の名をとり Vaisman algebroid とする*1。定義上、Vaisman algebroid は Courant algebroid の一般化で与えられる。

3 結論

本研究では、Vaisman algebroid が Courant algebroid を経由しなくても 2 つの Lie algebroid から直接構成できることを新たに確かめた。また、この 2 つの Lie algebroid は Lie bialgebroid から derivation 条件を緩めたものである事がわかった。この Double によって得られる Vaisman algebroid を用いることで、DFT 側の物理的要請である「強い拘束条件」に対して数学的な解釈を与えることが可能となる。詳細な議論は [4] で行った。

参考文献

- [1] C. Hull and B. Zwiebach, “The Gauge algebra of double field theory and Courant brackets,” *JHEP* **0909** (2009) 090 [arXiv:0908.1792].

*1 例えば、Vaisman 自身はこの構造を metric algebroid と呼んでいる [3].

- [2] O. Hohm and B. Zwiebach, “Large Gauge Transformations in Double Field Theory,” *JHEP* **1302** (2013) 075 [[arXiv:1207.4198](#)].
- [3] I. Vaisman, “On the geometry of double field theory,” *J. Math. Phys.* **53** (2012) 033509, [[arXiv:1203.0836](#)].
- [4] H. Mori, S. Sasaki and K. Shiozawa, “Doubled Aspects of Vaisman Algebroid and Gauge Symmetry in Double Field Theory,” [arXiv:1901.04777](#).

森 遥

1995 年生まれ。2018 年 3 月北里大学理学部物理学科卒業。専門は素粒子理論・数理物理。修士修了とともに就職しようと思っていたが……？