世界に i は必要か？

首都大学東京　理工学研究科　物理学専攻
原田　浩充

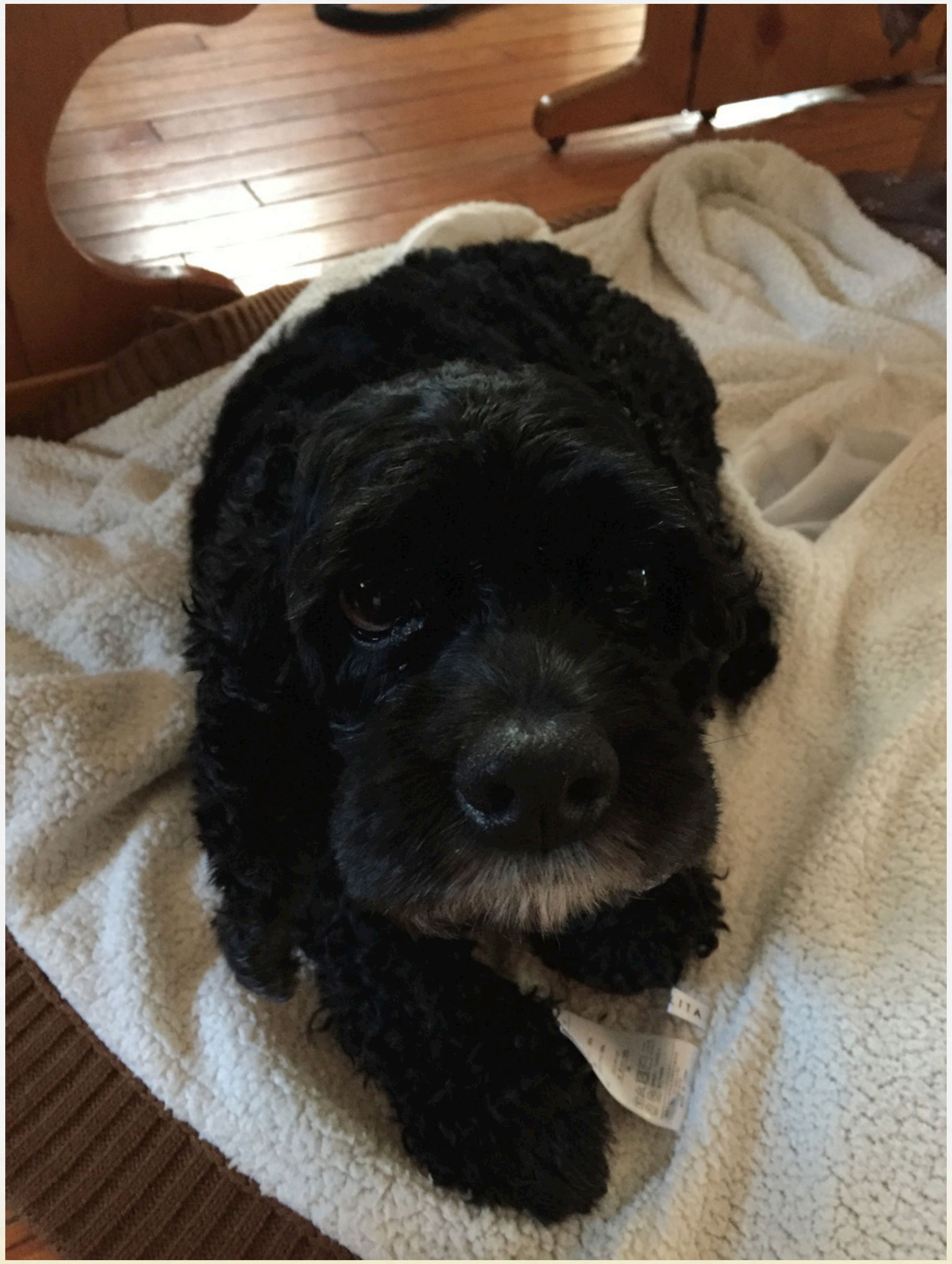
四葉研究交流会
2018/3/25

自己紹介

- 名前：原田　浩充
- 専攻：物理学（非線形物理学）
- 趣味：アニメ鑑賞、囲碁、タイムマシンの理論構築
- ペット：犬（らむ）

愛犬

- 名前：らむ（♀）
- 専攻：睡眠
- 趣味：だっこされる事



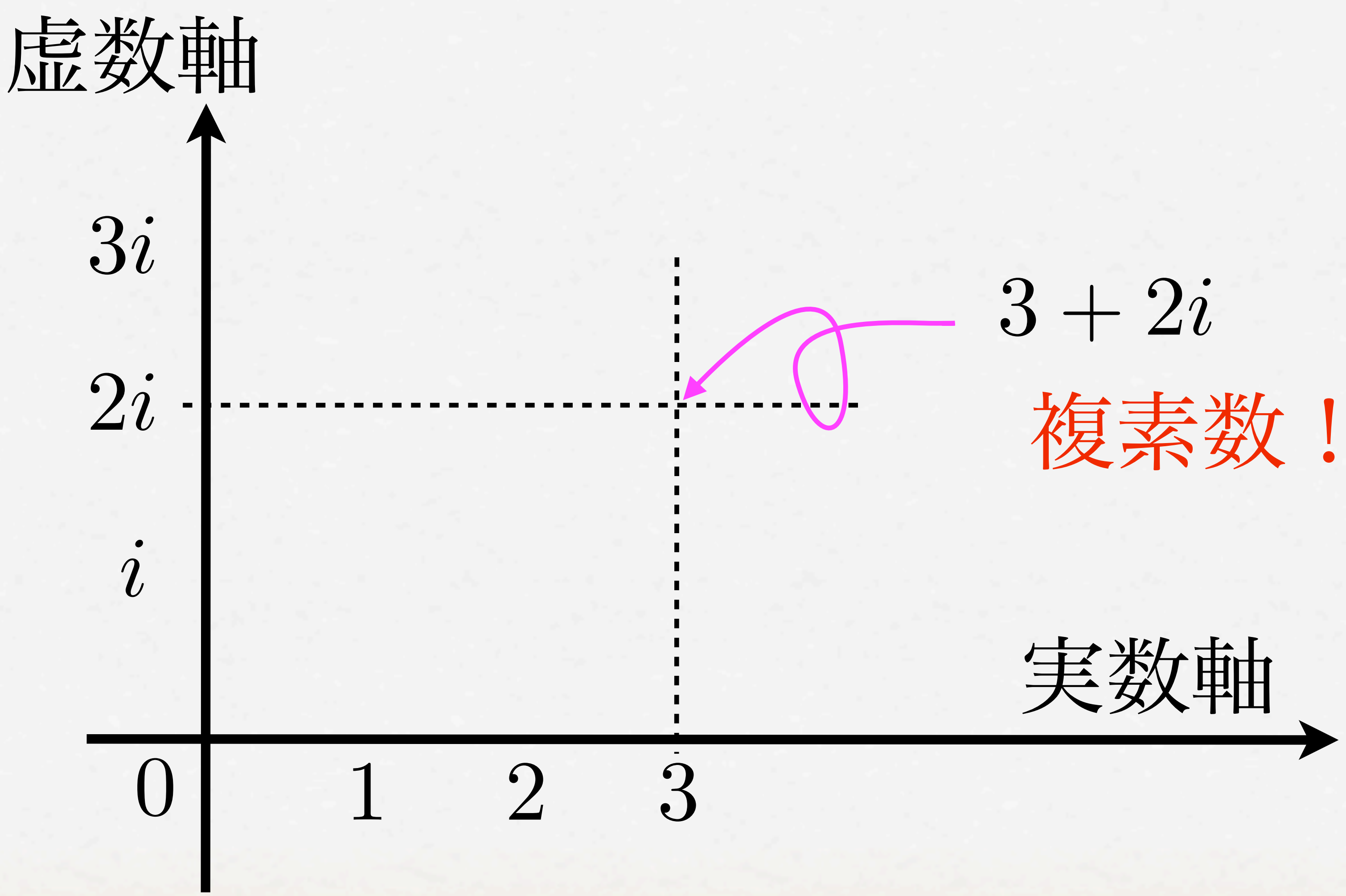
虚数と複素数

二次方程式		二次方程式の解
$x^2 = 4$	$\rightarrow$	$x = \pm 2$
$x^2 = 3$	$\rightarrow$	$x = \pm\sqrt{3}$
$x^2 = -1$	$\rightarrow$	$x = \pm i$

i を虚数（*Imaginary number*）という

虚数と複素数

複素平面



複素数と物理学

どういうところに複素数がでてくるか

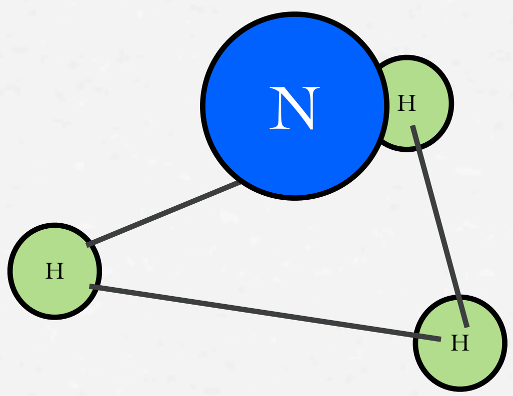
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$|\psi(x)|^2$ は位置 x における粒子の存在する確率

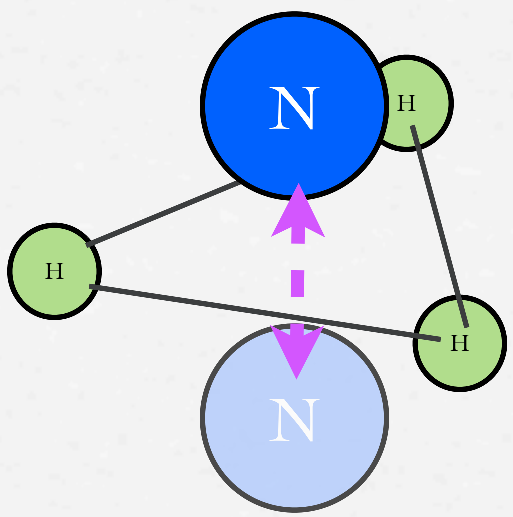
アンモニアメーザー発振原理

アンモニア分子NH_3



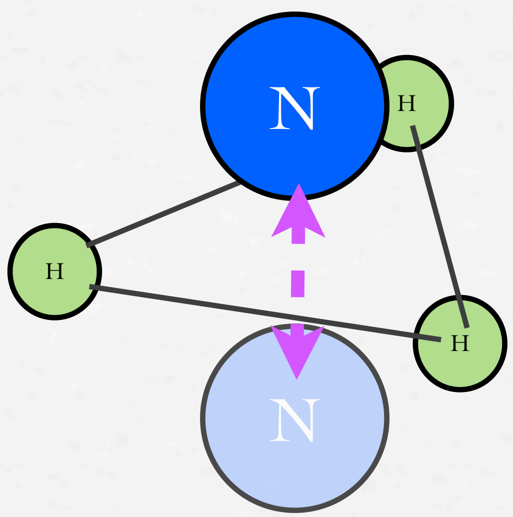
アンモニアメーザー発振原理

アンモニア分子NH_3

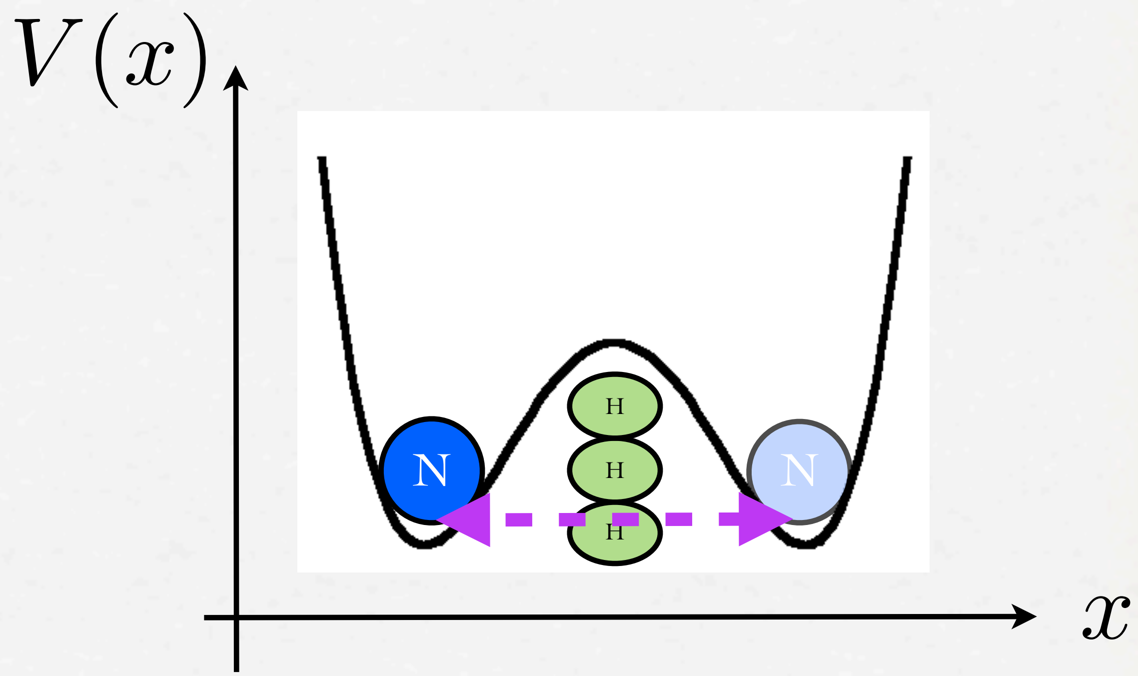


アンモニアメーザー発振原理

アンモニア分子NH_3

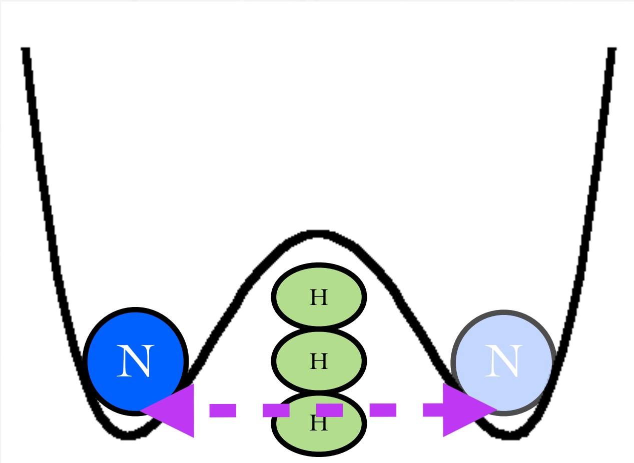


二重井戸型模型

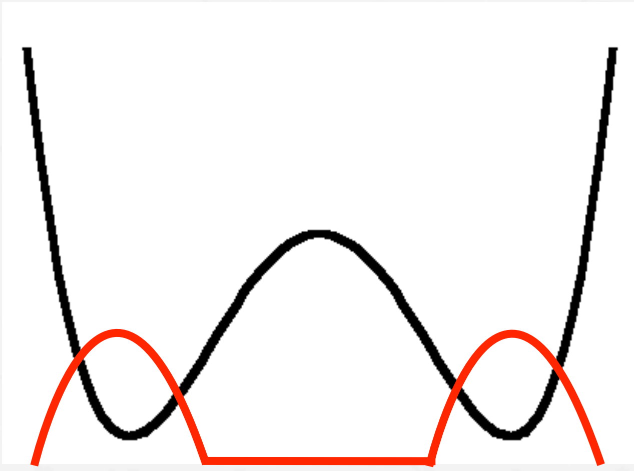


アンモニアメーザー発振原理

二重井戸模型



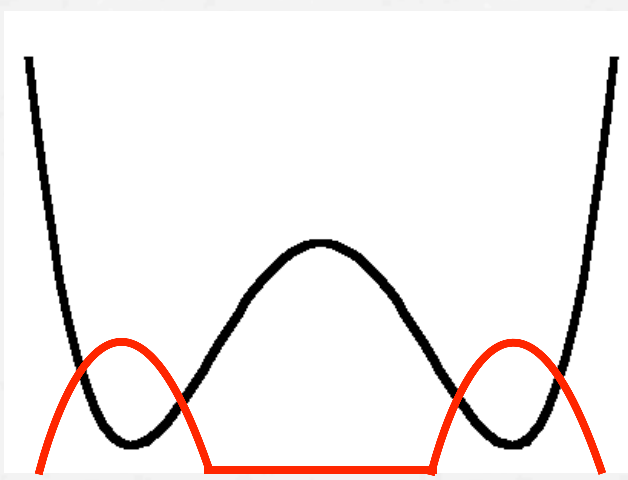
波動関数



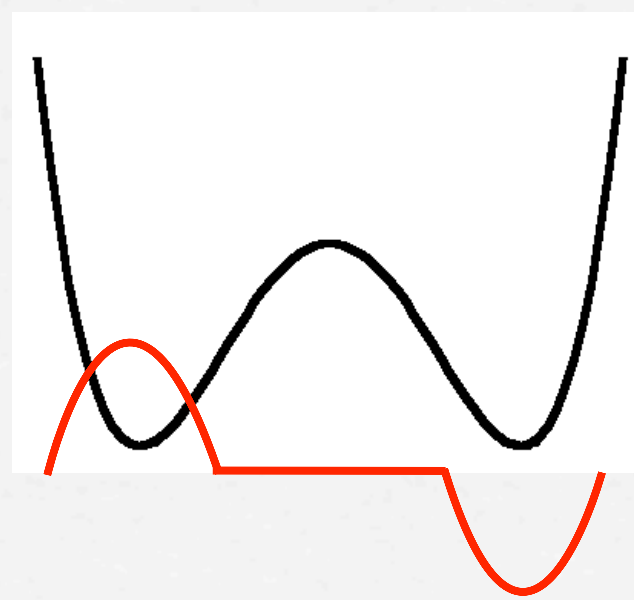
$\psi(x)$

アンモニアメーザー発振原理

エネルギー固有関数



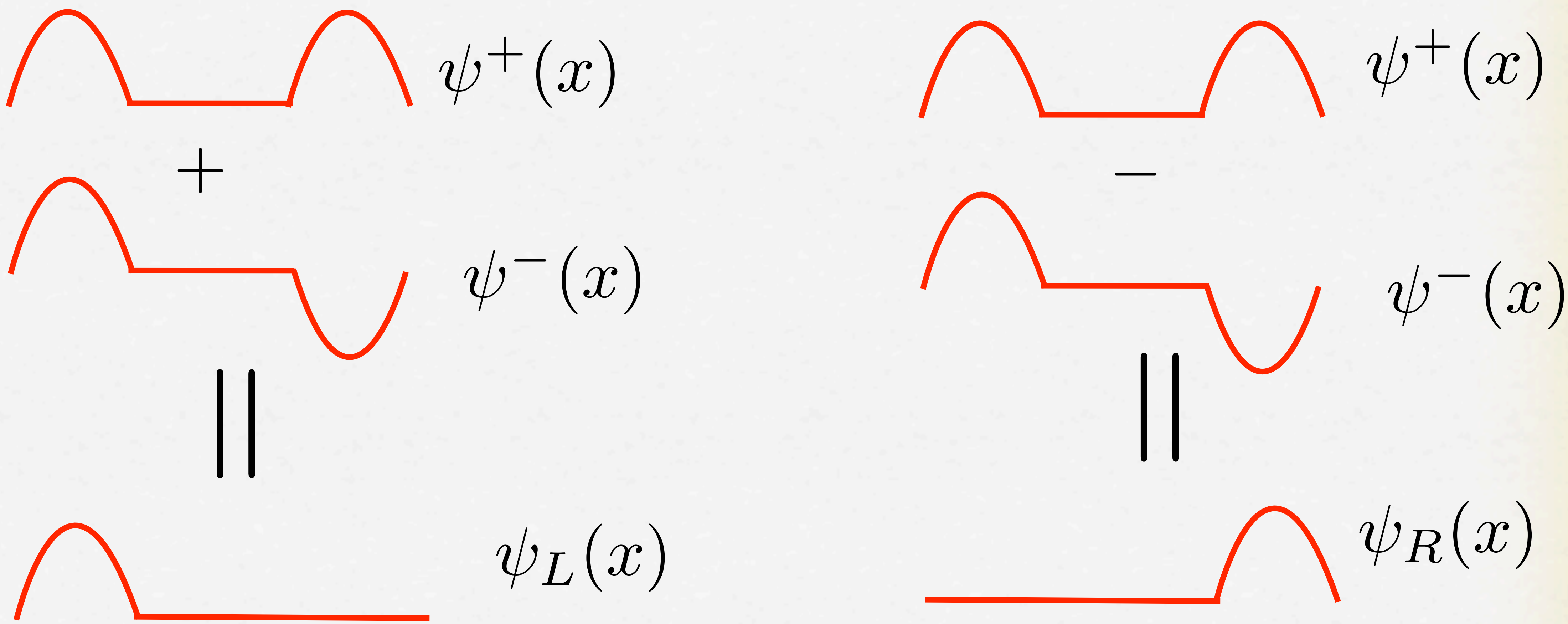
偶関数 $\psi^{+}(x)$



奇関数 $\psi^{-}(x)$

アンモニアメーザー発振原理

波動関数の重ね合わせ



アンモニアメーザー発振原理

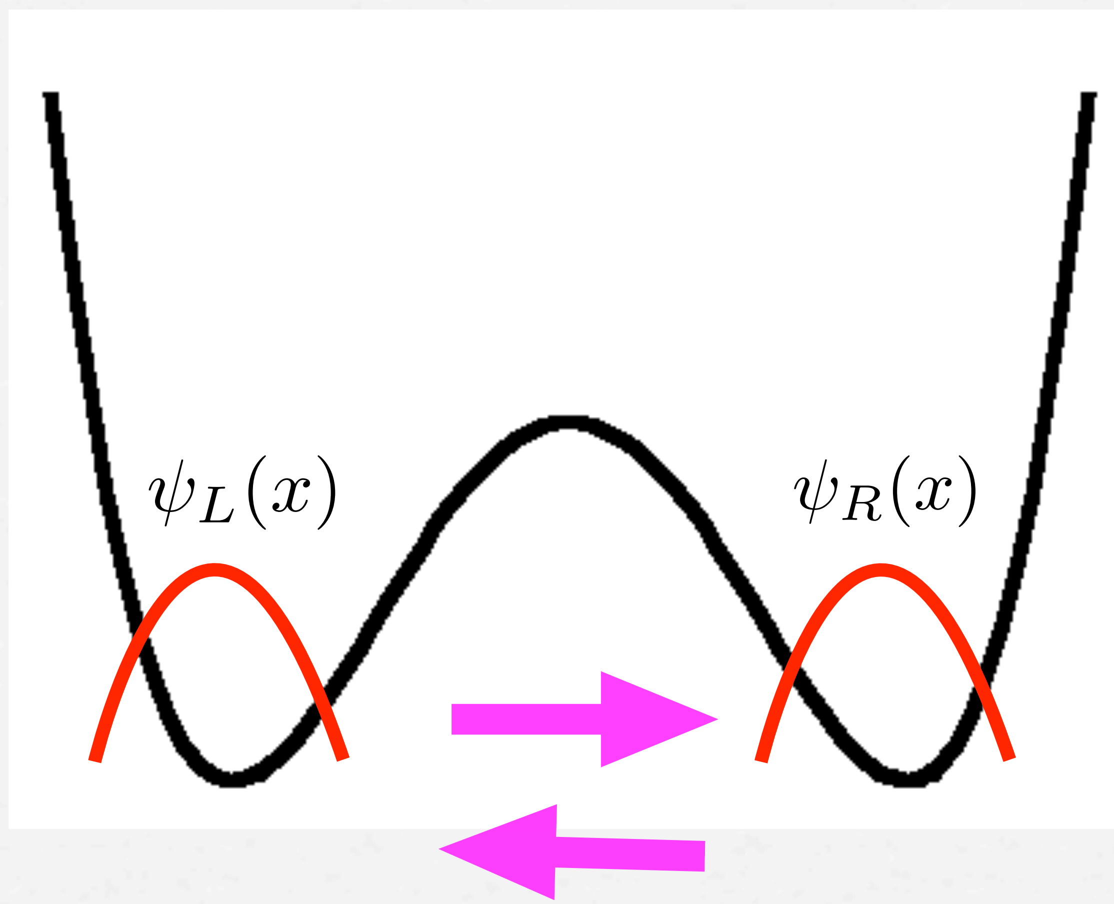
波動関数の時間発展

$$\psi_L = \psi^+ + \psi^-$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}(T)\psi_L &= e^{-iE^+T/\hbar}\psi^+ + e^{-iE^-T/\hbar}\psi^- \\
&= e^{-iE^+T/\hbar}\left(\psi^+ + \underbrace{\boxed{e^{-i(E^- - E^+)T/\hbar}}}_{= -1}\psi^-\right) \\
&= e^{-iE^+T/\hbar}\psi_R
\end{aligned}$$

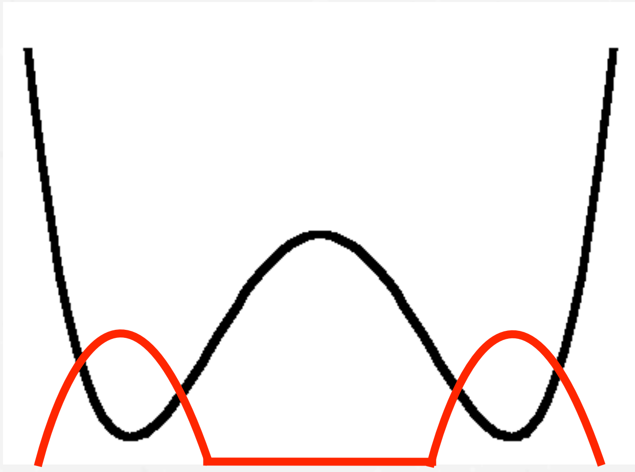
K. T. Hecht, *Quantum Mechanics*, New York: Springer-Verlag (2000)

アンモニアメーザー発振原理



トンネル振動

定在波が立つ条件



ボーア・ゾンマーフェルトの
量子化条件

$$S = \int p(x)dx = 2\pi\hbar(\frac{1}{2} + m)$$

L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* Third Edtion (1970)

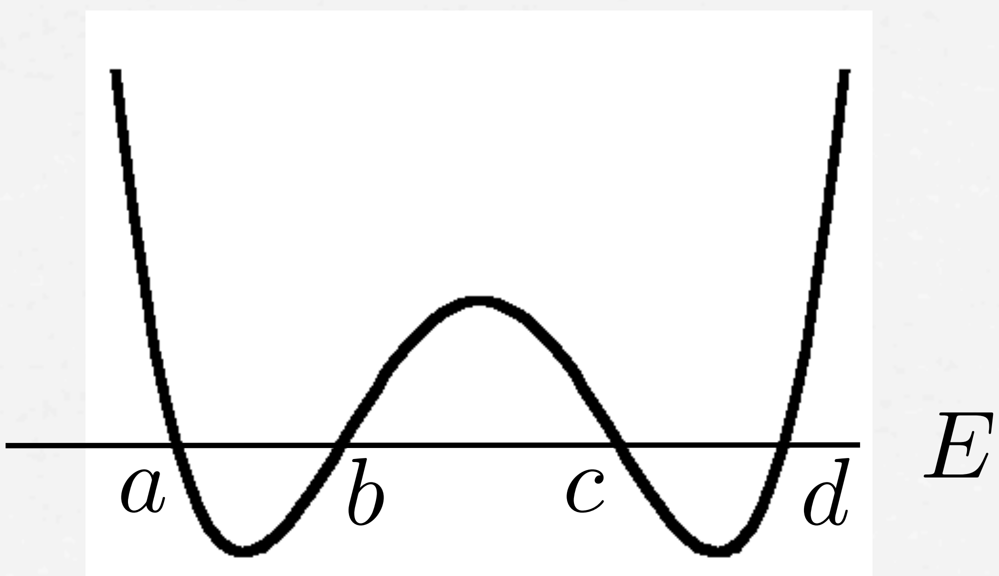
運動の作用とリーマン面

二重井戸型ポテンシャル系

運動エネルギー　位置エネルギー

$$E = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$$

$$V(x) = E - (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

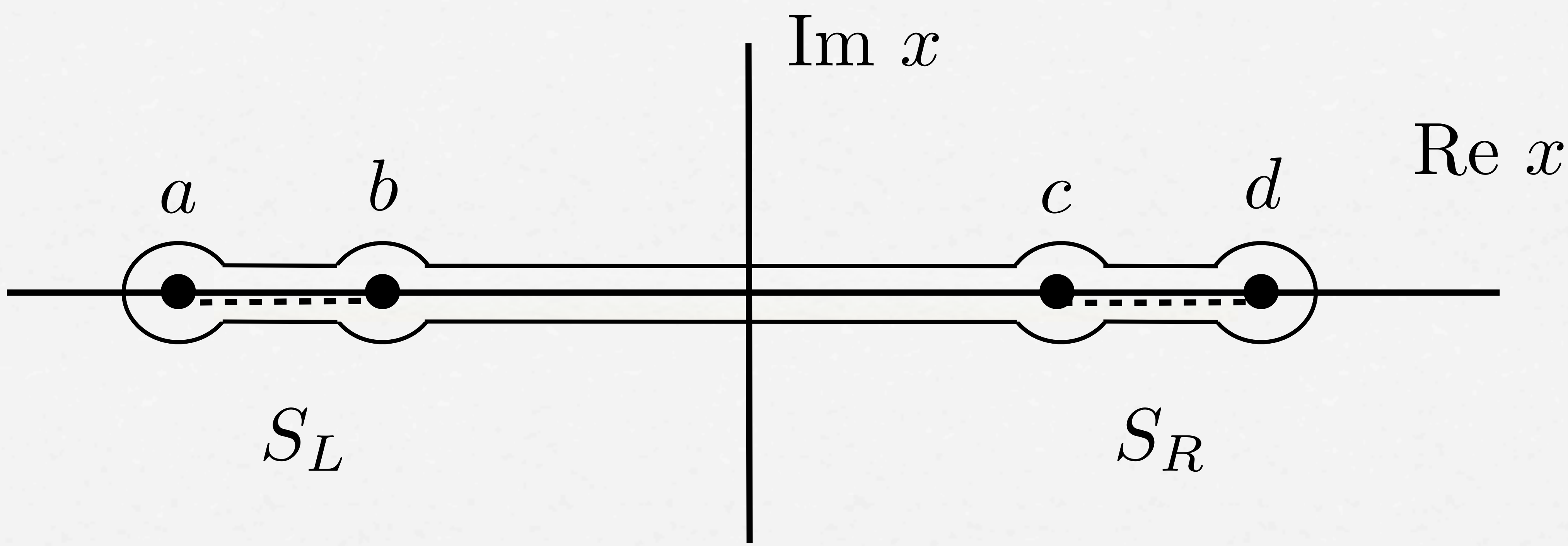


$$p(x) = \sqrt{2(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$$

運動の作用とリーマン面

$p(x) = \sqrt{2(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$

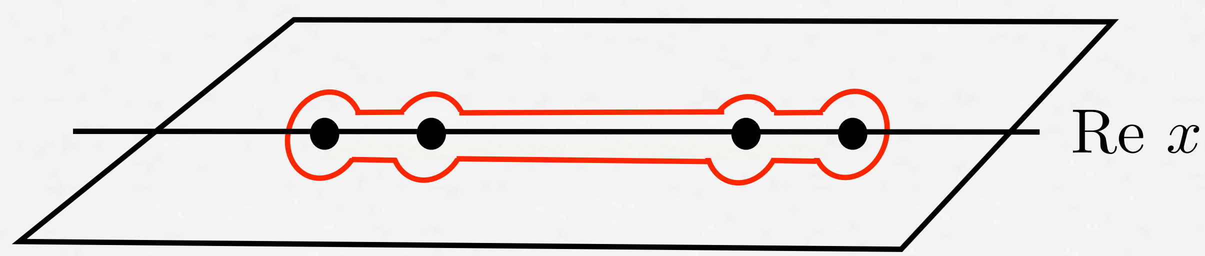
複素平面 $\lfloor x$



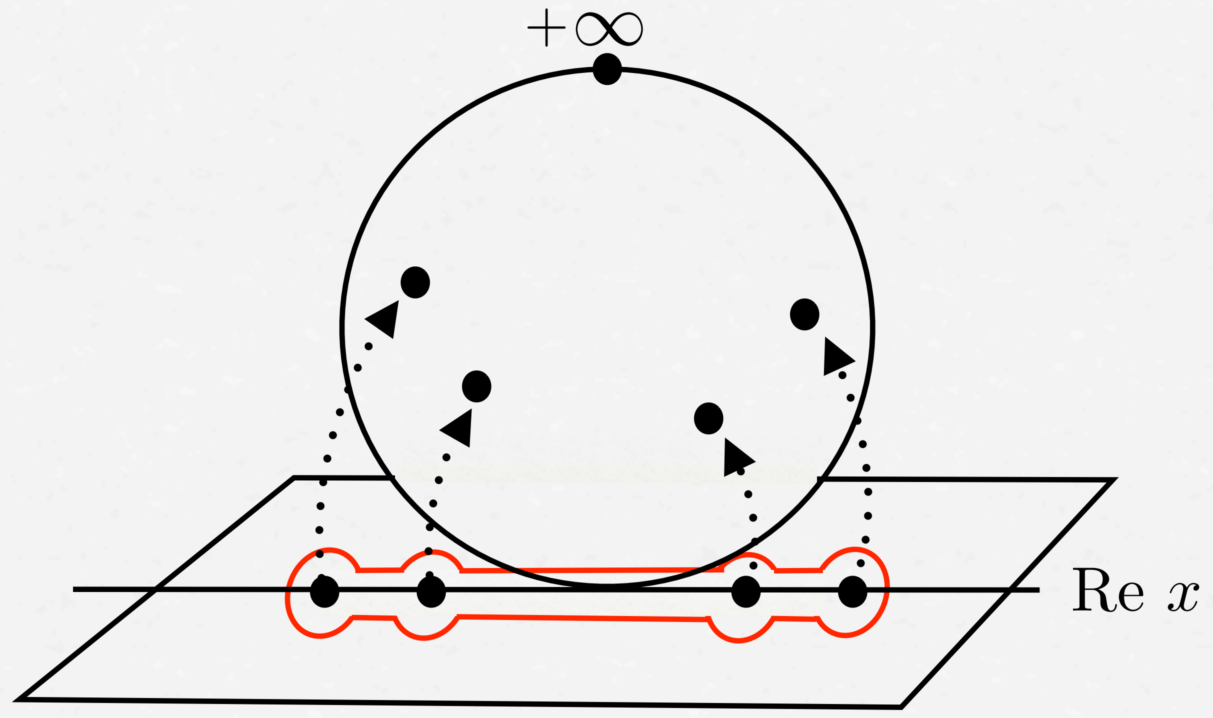
$$\boxed{S = S_R - S_L}$$

D. Khuat-duy and P. Leboeuf, Appl. Phys. Lett. **63** 1903 (1993)

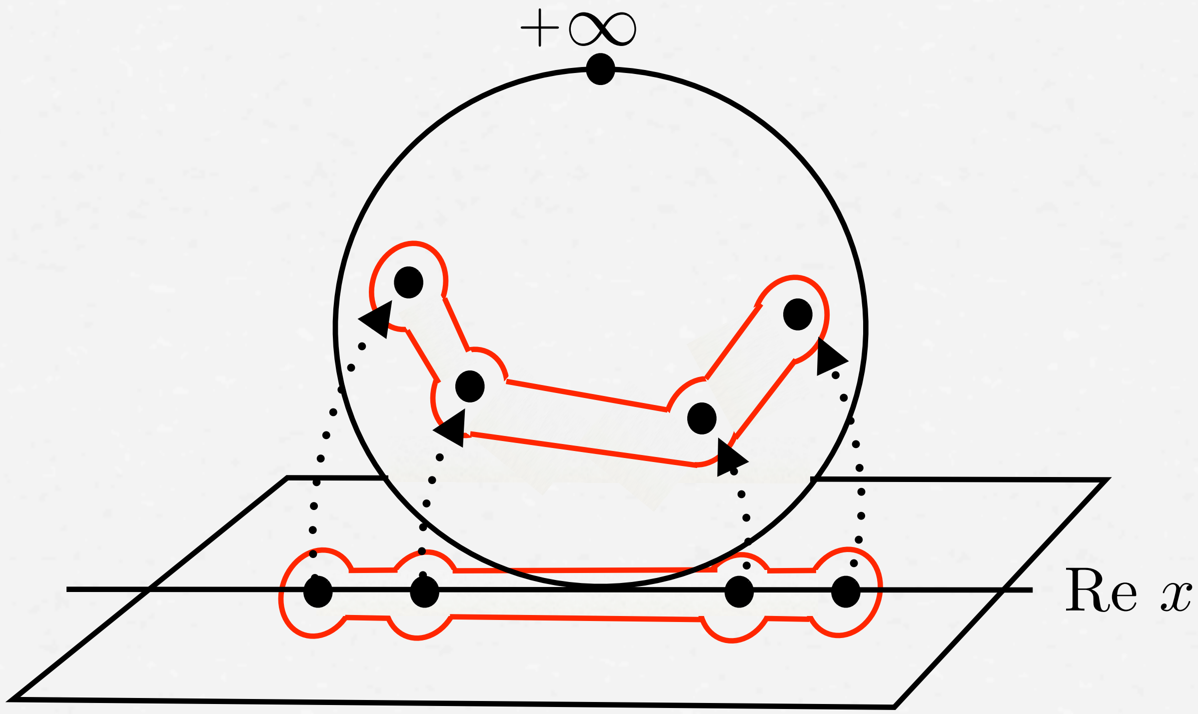
運動の作用とリーマン面



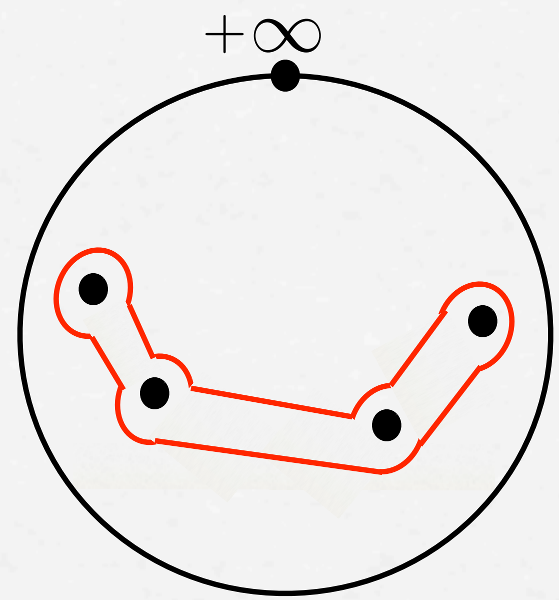
運動の作用とリーマン面



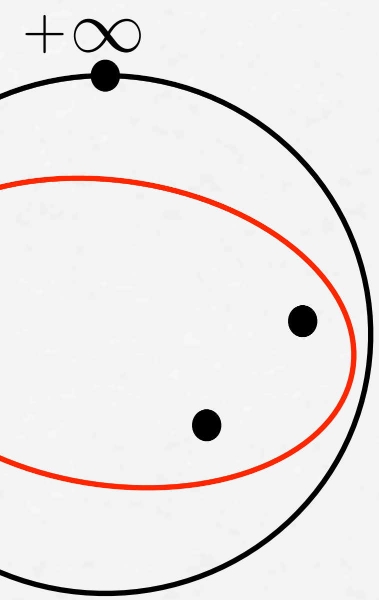
運動の作用とリーマン面



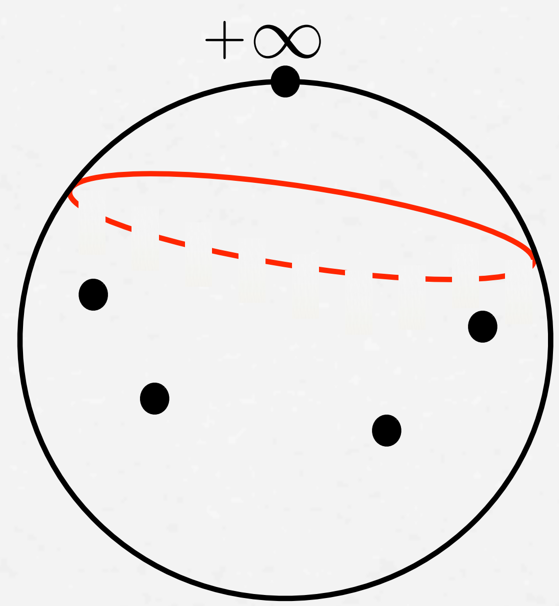
運動の作用とリーマン面



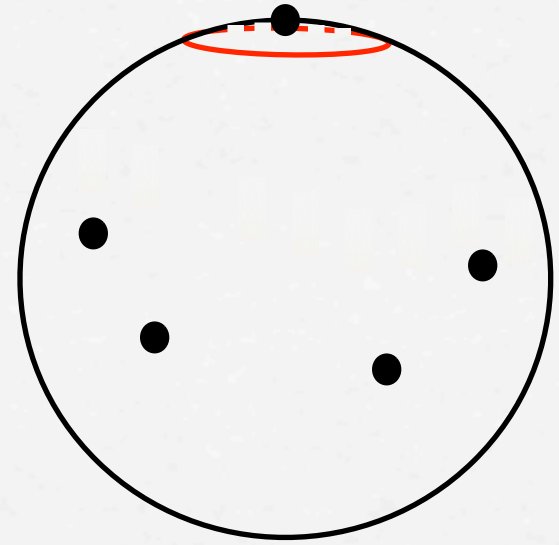
運動の作用とリーマン面



運動の作用とリーマン面

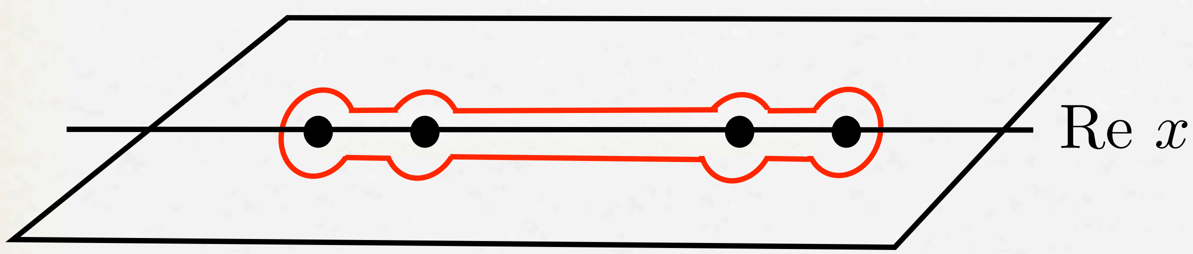


運動の作用とリーマン面

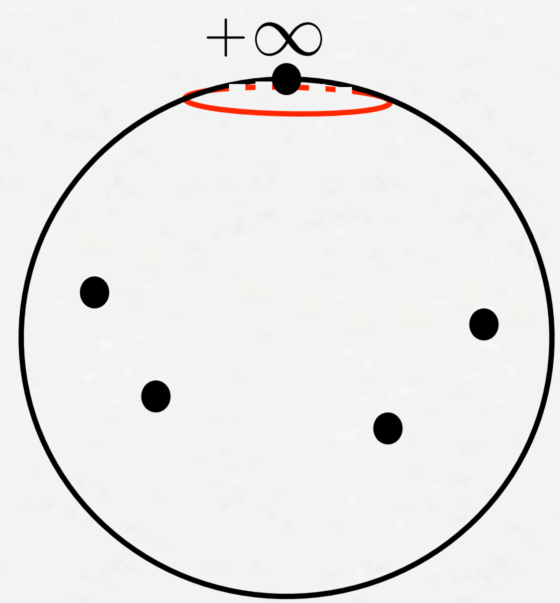


$$S = S_\infty = \oint p(x)dx$$

運動の作用とリーマン面



$$S = S_R - S_L$$



$$S = S_\infty$$

運動の作用とリーマン面

$$S_R - S_L = S_\infty$$

実空間の運動の作用 $=$ 複素関数の無限遠の留数!!

H. Harada, Doctoral Thesis (2018)

運動の作用とリーマン面

$$S_R - S_L = S_\infty$$

ボーア・ゾンマーフェルト
の量子化条件

$2\pi\hbar(\frac{1}{2} + m)$

ボーア・ゾンマーフェルト
の量子化条件

$2\pi\hbar(\frac{1}{2} + m')$

$2\pi\hbar \times l$

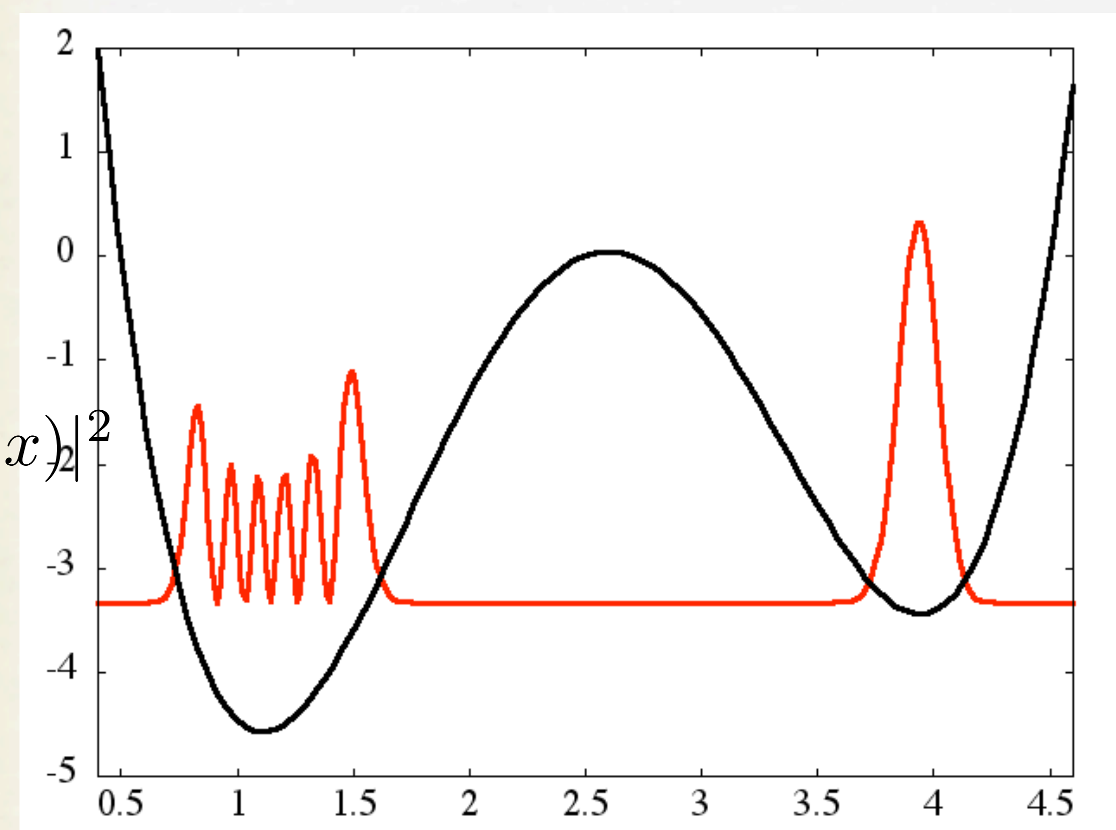
井戸の左右同時量子化

$\frac{S_\infty}{2\pi\hbar} = 5$ 量子化 ○

$\frac{S_\infty}{2\pi\hbar} = 4.9875$ 量子化 ×

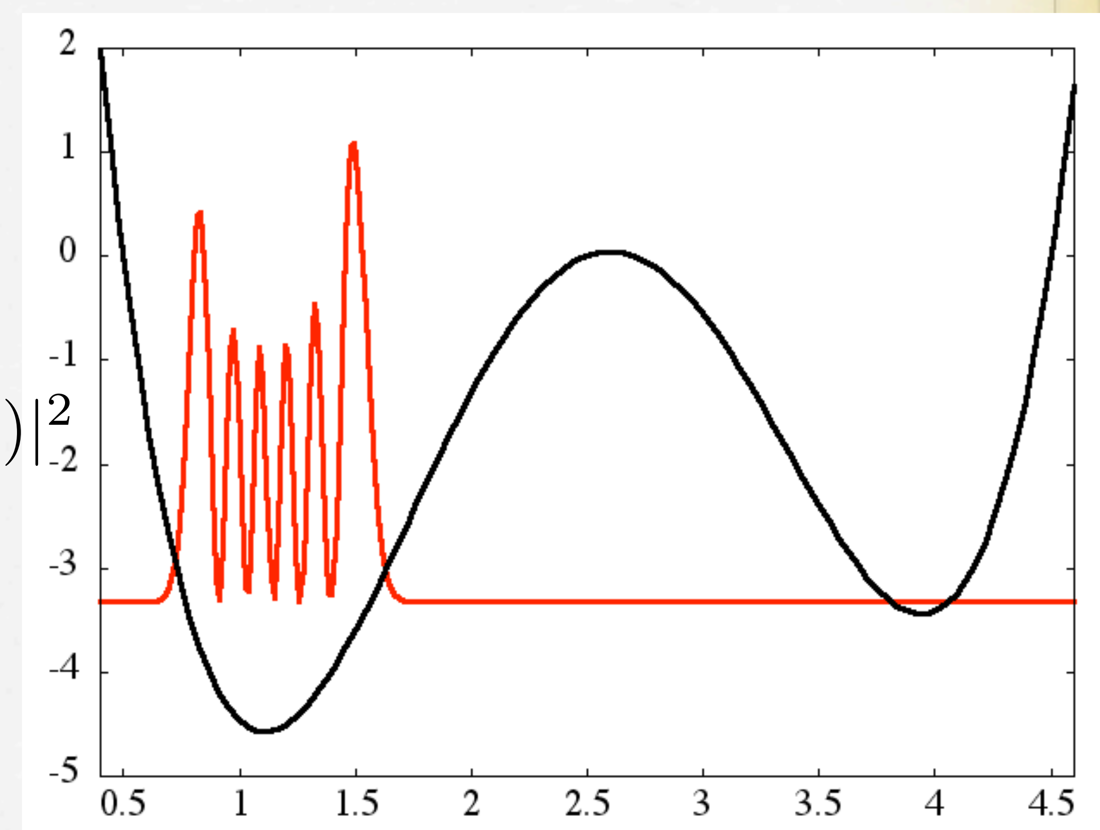
波動関数のシミュレーション

$|\psi(x)|^2$



x

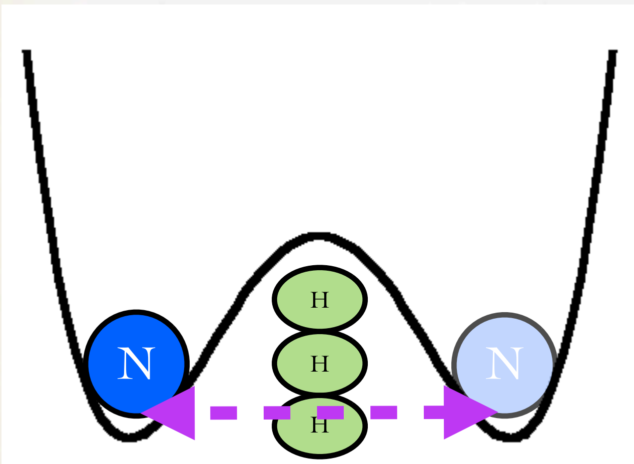
$|\psi(x)|^2$



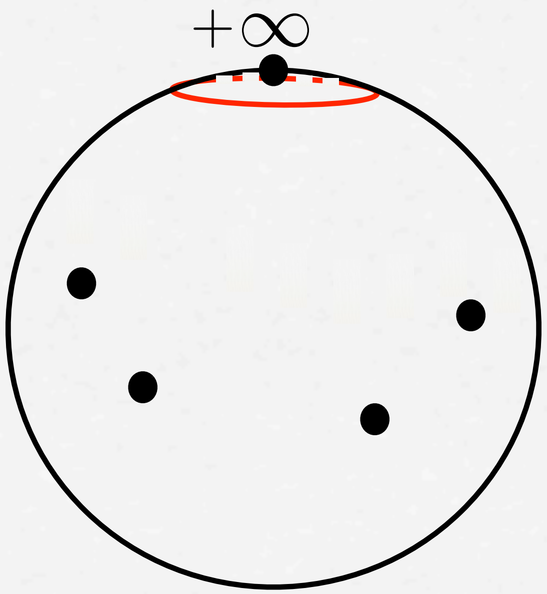
x

まとめ

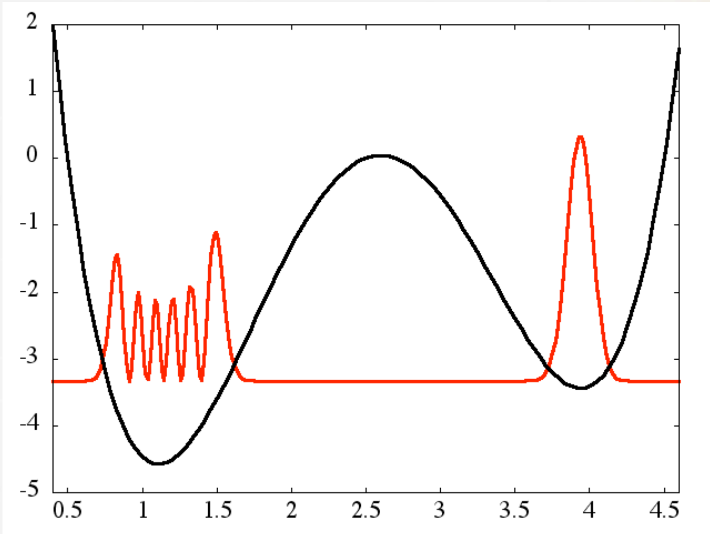
二重井戸模型



量子化



波動関数



複素数を考えることでコントロール出来る

ご清聴ありがとうございました

ジュリア集合

$$f(z) = z^2 + a$$