# ポアンカレ群と１粒子状態の分類

東京理科大学理学部物理学科 3 年　○鞠谷　温士 (Haruto Kikutani)

**概要**

相対論的場の量子論はポアンカレ不変性に基づいて構築される. これによって場を量子化して得られる 1 粒子状態はいくつかの属性によって分類されることが導かれる. 本稿ではこの 1 粒子状態の分類について論ずる. なお, 本稿はいくつかの文献を参考にした勉強のまとめである.

## 1　序論

現代物理学において, 素粒子とその相互作用の理論は相対論的場の量子論という枠組みで記述されている. 相対論的場の量子論を簡潔に説明することは難しいが, ここでは「相対論的」「場」「量子論」という 3 つに分解して考えてみる. まず相対論的というのは, アインシュタインの特殊相対性理論に従うということで, 特に任意の慣性系*1で物理法則は不変であるという, 特殊相対性原理を要請していることを意味する. また場とは, 時空上に分布している何らかの量であり, 例えば電磁場のようなものがある. そして量子論とは, その場を量子力学*2的に扱うということであるが, そうすることでエネルギーが飛び飛びの値をとるようになり, そのエネルギー単位を粒子として解釈することができるようになる. つまり, 量子化を行うことで場という波動的描像から粒子的描像が現れることになり, 量子論における粒子と波動の二重性が自然に説明される.

ところで, 実際の素粒子はそれぞれの属性を持つ. 例えば, 質量や電荷, またスピン*3などがある. そして素粒子はこれらの属性によって区別され, 分類される. この素粒子の属性は相対論的場の量子論の立場では, 具体的な場の性質を決めればその場に対応する粒子の性質は定まることになる. しかし, そうした個別の場を考えなくとも, 理論が相対論的不変性を有するという共通の性質から, 素粒子のとりうる属性が決まる部分がある. それによって素粒子を分類することが可能になり, 実際に観測される素粒子はその分類に従っている. これは相対論的場の量子論の成功の一つである.

そこで本稿ではこの 1 粒子状態の分類について論ずる. その意義としては一つは上に述べたように現実の素粒子の性質を説明することができる点である. またもう一つの意義としては, ポアンカレ不変性による 1 粒子状態の分類が物理において対称性*4が果たす役割

*1 慣性の法則 (力の働いていない物体は等速直線運動を行う) の成り立つ座標系
*2 素粒子や原子など, ミクロの世界を扱う物理学
*3 素粒子の内的な回転の自由度. 素粒子の「自転」のようなもの
*4 対象がある変換に対して不変であるとき対称性を持つという. 例えば, 円は 2 次元回転しても形が不変で

の一例として見れる点である. 現代物理学において対称性は重要な概念であり, 多くの応用がある. 対称性について一般的に論じることはできなかったが, 具体例を通して対称性と物理現象との関係の一端が理解できればと考える.

本論の流れは次の通りである. まず 2.1 ではポアンカレ群の定義を行い, 続く 2.2 では量子論におけるポアンカレ変換の表現を考える. 2.3 ではポアンカレ群の生成子として 4 元運動量や 4 元的角運動量を定義し, その交換関係を求める. 次に 2.4 では 1 粒子状態を質量と 4 元運動量によって分類する. 最後の 2.5 から 2.7 では 2.4 での分類ごとにより詳しい 1 粒子状態の分類を行った. なお, 本稿は新規の研究ではなく, いくつかの文献を参考にした勉強のまとめである. 歴史的にポアンカレ群のユニタリ表現の分類を行ったのは,Wigner(1939) である. 本論を書くにあたっては,2.1,2.2 のポアンカレ群や表現の定義の話は主に佐藤 (2016) の 1,2,8 章を, また 2.3 以降の 1 粒子状態の分類の話は主に坂本 (2014) の 14 章の内容を参考にした.

# 2 本論

## 2.1 ポアンカレ群

はじめに, ポアンカレ変換及びポアンカレ群の定義を行う.

ある事象が一つの慣性系 ($S$ 系) から見て $x={}^t(x^0,x^1,x^2,x^3)$ という座標で表され, 別の慣性系 ($S'$ 系) から見て $x'={}^t(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)$ という座標で表されるとする. 相対論によれば, このとき両者の関係は次のポアンカレ変換によって結ばれる.

$$x' = \Lambda x + a$$

ここで $\Lambda$ は

$${}^t\Lambda\eta\Lambda = \eta \quad , \quad \eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

をみたす $4\times 4$ 行列でローレンツ変換を表す. また $a$ は時空並進を表す 4 元定数ベクトルである.

$S$ 系から $S'$ 系にポアンカレ変換を行い, さらにもう一度 $S'$ 系から $S''$ 系にポアンカレ変換を行うと

$$x'' = \Lambda_2 x' + a_2 = \Lambda_2(\Lambda_1 x + a_1) + a_2 = \Lambda_2\Lambda_1 x + (\Lambda_2 a_1 + a_2)$$

再びポアンカレ変換になる. ここで記号的に一つのポアンカレ変換を $(\Lambda, a)$ で指定すると二つのポアンカレ変換の積は

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \tag{1}$$

あり, 回転対称性を持つ.

となる.

一般に集合 $G$ の二つの元 $g_1, g_2$ に対して積 $g_1 g_2$ が定義されていて, 次の (1) から (3) をみたすとき,$G$ はこの積について群をなすという.

(1) 任意の $g_1, g_2, g_3 \in G$ に対して $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
(2) 単位元 $e \in G$ が存在し, 任意の $g \in G$ に対して $ge = eg = g$
(3) 任意の $g \in G$ に対して, 逆元 $g^{-1} \in G$ が存在し $g^{-1} g = g g^{-1} = e$

ポアンカレ変換の全体は (1) 式の積について群をなし, これをポアンカレ群という.

## 2.2 ポアンカレ群のユニタリ表現

相対論的場の量子論ではポアンカレ変換によって状態ベクトル及びその上に働く演算子が変換を受ける.

$S$ 系から見た状態が $|\psi\rangle$,$S'$ 系から見た状態が $|\psi'\rangle$ だとすると両者は

$$|\psi'\rangle = U(\Lambda, a) |\psi\rangle$$

で結ばれる. ここで $U(\Lambda, a)$ はポアンカレ変換のユニタリ表現[*5]である.

これに対応して演算子 $A$ が $A'$ に変換されたとすると確率振幅は

$$\langle \varphi' | A' | \psi' \rangle = \langle \varphi | U^\dagger(\Lambda, a) A' U(\Lambda, a) | \psi \rangle$$

と変換されるが, この量は慣性系に依らず不変でなければならないので

$$\langle \varphi' | A' | \psi' \rangle = \langle \varphi | A | \psi \rangle$$

が成り立つ必要がある. 従って $A$ は

$$A' = U(\Lambda, a) A U^\dagger(\Lambda, a)$$

と変換すれば良いことがわかる.

## 2.3 ポアンカレ群の生成子

4 元運動量 $P^\mu$ は時空並進の生成子なので

$$U(1, \varepsilon) = 1 + i \varepsilon_\mu P^\mu \quad (|\varepsilon_\mu| \ll 1)$$

[*5] 一般に群 $G$ の元 $g$ に対してベクトル空間 $V$ 上の線形演算子 $\rho(g)$ が対応し任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ が成り立つとき $(\rho, V)$ を $G$ の $V$ 上の表現という. 特に $\rho(g)$ がユニタリ演算子であるときユニタリ表現という

同様に「4 元的」角運動量 $J^{\mu\nu}$[*6]はローレンツ変換の生成子なので

$$U(1+\Delta\omega,0) = 1 + i\frac{1}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \quad (|\Delta\omega_{\mu\nu}| \ll 1\ ,\ \Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu})$$

以下では $P^{\mu}$ と $J^{\mu\nu}$ のポアンカレ変換の下での変換性から $P^{\mu}$ と $J^{\mu\nu}$ の交換関係を導く.

まず, 4 元運動量 $P^{\mu}$ は時空並進の下で不変なので

$$U(1,\varepsilon)P^{\nu}U^{\dagger}(1,\varepsilon) = P^{\nu}$$

左辺を展開して $\varepsilon$ の 1 次の項を比較すれば

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0$$

を得る.

次に, 4 元運動量 $P^{\mu}$ はローレンツ変換の下で 4 元ベクトルの変換性をもつので

$$U(1+\Delta\omega,0)P^{\rho}U^{\dagger}(1+\Delta\omega,0) = (\delta^{\rho}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\rho}{}_{\nu})P^{\nu}$$

両辺展開して $\Delta\omega$ の 1 次の項を比較すれば

$$[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] = -i(\eta^{\mu\rho}P^{\nu} - \eta^{\nu}P^{\mu})$$

を得る.

最後に, 4 元的角運動量 $J^{\mu\nu}$ はローレンツ変換の下で 2 階のテンソルの変換性をもつので

$$U(1+\Delta\omega,0)J^{\rho\lambda}U^{\dagger}(1+\Delta\omega,0) = (\delta^{\rho}{}_{\mu} + \Delta\omega^{\rho}{}_{\mu})(\delta^{\lambda}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\lambda}{}_{\nu})J^{\mu\nu}$$

両辺展開して $\Delta\omega$ の 1 次の項を比較すれば

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\lambda}] = -i(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu} - \eta^{\nu\lambda}J^{\rho\mu})$$

を得る.

以上をまとめると

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0 \tag{2}$$

$$[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] = -i(\eta^{\mu\rho}P^{\nu} - \eta^{\nu}P^{\mu}) \tag{3}$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\lambda}] = -i(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu} - \eta^{\nu\lambda}J^{\rho\mu}) \tag{4}$$

これをポアンカレ代数という.

[*6] $ij$ 成分は空間回転の生成子で角運動量に対応. $0i$ 成分は時空回転の生成子である. 単なる角運動量ではなく, また添え字が二つあるので 4 元でもないので便宜上「4 元的」と書いた.

## 2.4　1 粒子状態の質量と 4 元運動量による分類

前節のポアンカレ代数に基づいて 1 粒子状態の分類を行っていく.
まず $[P^\mu, P^\nu] = 0$ より 4 元運動量確定の同時固有状態がとれる.

$$P^\mu |p,\sigma\rangle = p^\mu |p,\sigma\rangle$$

ここで $\sigma$ はその他の自由度を表す.
4 元運動量の内積 $P^2 = P_\mu P^\mu$ は相対論的不変量で $P^\mu$ 及び $J^{\mu\nu}$ と可換な演算子である. 従って $p^2 = p_\mu p^\mu = m^2$ に注意すれば

$$P^2 |p,\sigma\rangle = m^2 |p,\sigma\rangle \tag{5}$$

従って質量によって 1 粒子状態を分類できる.
さて, これ以上 4 元運動量 $P^\mu$ と可換な演算子は一見すると無い. そこで $P^2$ 及び $P^\mu$ を用いて状態を分類して個別に考えることにする.

(I)　$p^2 = m^2 > 0$ , $p^0 > 0$　: 有質量 1 粒子
(II)　$p^2 = m^2 > 0$ , $p^0 < 0$　: 負エネルギー
(III) $p^2 = m^2 = 0$ , $p^0 > 0$　: 無質量 1 粒子
(IV) $p^2 = m^2 = 0$ , $p^0 < 0$　: 負エネルギー
(V)　$p^2 = m^2 < 0$　: タキオン
(VI) $p^\mu = 0$　: 真空

(II)(IV) の負エネルギー状態が存在するといくらでもエネルギー準位が下がってしまい, 安定でない. 従って物理的状態とはみなせない. また (V) のタキオンは質量の自乗が負であり, これも物理的状態とみなせない. 従って (I)(III)(VI) のみが物理的状態である. 以下ではそれぞれの状態見ていく.

## 2.5　真空

(VI) の場合

$$p^\mu = (0,0,0,0)$$

なのでこのような $|p,\sigma\rangle$ の張る部分空間上では (3) 式より

$$[J^{\mu\nu}, P^\rho] = 0$$

である. 従ってこのときは $P^\mu$ と $J^{\mu\nu}$ の同時固有状態がとれる.

特に

$$P^\mu |0\rangle = 0 \quad , \quad J^{\mu\nu} |0\rangle = 0$$

をみたす状態 $|0\rangle$ を真空という. これは粒子のいない状態である.

この真空はポアンカレ変換に対して不変である.(ポアンカレ群の恒等表現)

$$U(\Lambda, a) |0\rangle = |0\rangle$$

## 2.6 有質量 1 粒子

(I) の場合は必ず静止系がとれるので

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

とする.

このとき状態 $|p, \sigma\rangle$ 上で $P^\mu$ と可換な演算子を探したい. それにはローレンツ変換の中で $p^\mu$ を変えないものを考えれば良い. このような変換の全体を $p^\mu$ のリトル・グループという. 今の場合, それは 3 次元空間回転であることがわかる.

実際 $|p, \sigma\rangle$ 上では (3) 式より

$$[J^{ij}, P^\mu] = 0$$

である. 従ってこのときは $P^\mu$ と角運動量 $J^{ij}$ の同時固有状態がとれる. 今の場合静止系なので角運動量 $J^{ij}$ はスピン角運動量 $S^{ij}$ としてよい.

$S^{ij}$ の固有状態はスピンの大きさ $s$ とスピンの $z$ 成分 $s_z$ によって分類されるので $\sigma$ として $(s, s_z)$ を取り

$$P^\mu |p, s, s_z\rangle = p^\mu |p, s, s_z\rangle \tag{6}$$

$$S^2 |p, s, s_z\rangle = s(s+1) |p, s, s_z\rangle \quad (s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots) \tag{7}$$

$$S_z |p, s, s_z\rangle = s_z |p, s, s_z\rangle \qquad (s_z = -s, -s+1, \cdots, s-1, s) \tag{8}$$

となる. 従って質量を持つ粒子は 4 元運動量 $p^\mu$ の他に $(s, s_z)$ でラベル付けされるスピン角運動量の属性を持つことがわかる.

このような粒子の例としては次のようなものがある.

| 場の種類 | 素粒子の例 | スピン |
|---|---|---|
| スカラー場 $\phi$ | ヒッグス粒子 | $s = 0$ |
| ディラック場 $\psi$ | 電子, クォーク | $s = \frac{1}{2}$ , $s_z = \pm\frac{1}{2}$ |
| プロカ場 $A_\mu$ | W,Z ボソン | $s = 1$ , $s_z = 0, \pm 1$ |

## 2.7 無質量 1 粒子

(III) の場合は静止系は取れないが適当に空間回転を行えば運動方向が $z$ 軸となるような系はとれるので

$$p^\mu = (E, 0, 0, E)$$

とする. (I) の場合と同様にローレンツ変換の中で $p^\mu$ を変えないものを考えたい.

今の場合, まず $z$ 軸周りの空間回転が考えられる. 実際 $|p,\sigma\rangle$ 上では (3) 式より

$$[J^{12}, P^\mu] = 0$$

である. 従ってこのときは $P^\mu$ と角運動量の $z$ 方向成分 $J^{12}$ の同時固有状態がとれる. 今の場合,$J^{12}$ はスピン角運動量の運動量方向成分なのでヘリシティ*7 $\hat{h}$ としてよい.

さらに演算子 $A, B$ を

$$A := J^{01} - J^{31} \quad , \quad B := J^{02} - J^{23}$$

と定めると $|p,\sigma\rangle$ 上で

$$[A, P^\mu] = 0 \quad , \quad [B, P^\mu] = 0$$

従って $P^\mu$ と $A, B$ の同時固有状態もとれる.

また $J^{12}$ と $A, B$ は次の交換関係をみたす.

$$[J^{12}, A] = iB \quad , \quad [J^{12}, B] = -iA \quad , \quad [A, B] = 0$$

一方で $J^{12}$ と $P^1, P^2$ も同じ交換関係をみたす.

$$[J^{12}, P^1] = iP^2 \quad , \quad [J^{12}, P^2] = -iP^1 \quad , \quad [P^1, P^2] = 0$$

従って $J^{12}$ と $A, B$ は 2 次元ユークリッド群*8の生成子である.

今 $|p,\sigma\rangle$ 上で $P^\mu$ と $A, B$ の同時固有状態がとれるので

$$A\,|p,a,b,\sigma\rangle = a\,|p,a,b,\sigma\rangle \quad , \quad B\,|p,a,b,\sigma\rangle = b\,|p,a,b,\sigma\rangle$$

ここで $(a, b)$ は運動量と同じように連続無限個の値をとる. しかし, 今は 1 粒子状態を考えているの連続自由度は考えないことにする.

そこで $a = b = 0$ の状態を考える.

$$A\,|p,h\rangle = 0 \quad , \quad B\,|p,h\rangle = 0$$

---

*7 一般にスピン角運動量 $\boldsymbol{S}$ の運動量 $\boldsymbol{p}$ 方向成分 $\hat{h} := \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ をヘリシティという

*8 二次元回転と二次元平行移動から成る群

ここで $P^\mu, A, B$ 以外の自由度 $\sigma$ を $h$ と置き換えた.

すると $|p,h\rangle$ 上では

$$[A, J^{12}] = 0 \quad , \quad [B, J^{12}] = 0$$

従って $P^\mu, A, B, J^{12} = \hat{h}$ の同時固有状態がとれる.

$$\hat{h}\,|p,h\rangle = h\,|p,h\rangle$$

となる.

ところでローレンツ群の表現は 2 価表現も含むので $2\pi$ 回転では必ずしも元に戻る必要はないが, $4\pi$ 回転では元に戻る必要がある. すなわち

$$e^{i4\pi J^{12}} = 1$$

従って $|p,h\rangle$ 上では

$$e^{i4\pi h} = 1 \quad \Rightarrow \quad h = 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1, \cdots$$

となり, $h$ の値が制限される.

以上をまとめると

$$P^\mu\,|p,h\rangle = p^\mu\,|p,h\rangle \tag{9}$$

$$\hat{h}\,|p,h\rangle = h\,|p,h\rangle \quad (h = 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1, \cdots) \tag{10}$$

となる. 従って質量を持たない粒子は 4 元運動量 $p^\mu$ とヘリシティ $h$ でラベルされる.

このような粒子の例としては次のようなものがある.

| 場の種類 | 素粒子の例 | ヘリシティ |
|---|---|---|
| カイラルスピノル $\psi_R, \psi_L$ | (左巻きニュートリノ)[*9] | $h = \pm\frac{1}{2}$ |
| (無質量) ベクトル場 $A_\mu$ | 光子, グルーオン | $h = \pm 1$ |
| 重力場 $g_{\mu\nu}$ | 重力子 | $h = \pm 2$ |

## 3　結論

本論の結果からポアンカレ不変性に基づく相対論的場の量子論に現れる物理的な 1 粒子状態は次のように分類された. まず粒子がいない状態であるが, 4 元運動量も 4 元的角運動量も 0 である真空状態が存在し, それがポアンカレ不変であることを見た. また, 有質量

[*9] 以前はニュートリノは質量を持たないと考えられていたが, 現在では実験的に質量を持つことがわかっている. ニュートリノの質量の起源は未解決の問題である.

1 粒子状態は 4 元運動量とスピンによって分類され, 無質量 1 粒子状態は 4 元運動量とヘリシティによって分類されることがわかった. 実際の素粒子はこの分類に従っている.

なお, 本稿では場の量子論の 1 粒子状態の分類を行ったが, これ以上粒子が分類されることが無いということではない. つまり,1 粒子状態がさらに他の属性によって区別されることは有りうる. 実際, 例えば $U(1)$ 不変性を持つ理論では粒子と反粒子の自由度がある. ただ, そのような他の自由度があるにしても本論で述べた粒子の分類はポアンカレ不変な理論である限り成り立っている.

本論で述べたポアンカレ群は二つの方向に拡張がある. 一つはポアンカレ変換の他にスケール変換と特殊共形変換を加えた共形群である. 共形不変性を持った場の理論は臨界現象や弦理論などへの応用がある. もう一つはポアンカレ変換に超対称性変換を加えた超ポアンカレ群である. 超対称性はボソンとフェルミオンを入れ替えるような対称性である. 本稿において対称性が物理に果たす役割の一例を見たが, これらの拡張がどのような物理的意味合いを持つのか勉強したいと考える.

## 参考文献

[1] Eugene Wigner, “On Unitary Representation of the Inhomogeneous Lorentz Group”, Ann. Math.,Vol.40, (1939).

[2] 坂本眞人, “場の量子論”, 裳華房, (2014).

[3] 佐藤光, “群と物理”, 丸善出版, (2016).

鞠谷温士

1993 年生まれ。2012 年麻布高校卒業、2017 年東京大学法学部卒業、2017 年東京理科大学理学部第二部物理学科 3 年次編入 (在籍中)。つい 1 年前まで文系人間でしたが, 物理の面白さを知って進路を変更しました。4 月から卒業研究で陽電子を用いた原子物理・物性物理を行う研究室に配属されます。